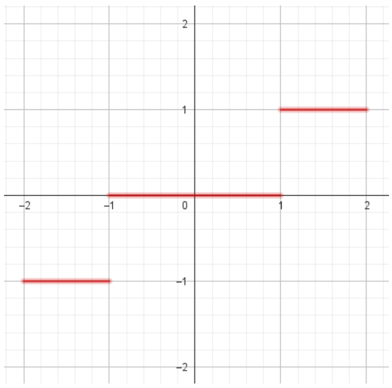
E3A - MP 2024 - Mathématiques

Éléments de correction

Exercice 1

1. La représentation graphique demandée est la suivante :



2. $X \sim \mathcal{G}(p)$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et donc

$$Y(\Omega) = \left\{ \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \middle| k \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Si k est pair, on écrit $k = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ donc

$$\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor p + \frac{1}{2} \right\rfloor = p.$$

Si k est impair, on écrit $k = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$ donc

$$\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \lfloor p+1 \rfloor = p + 1.$$

Ainsi

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}(Y = k) &= (k \leq Y < k+1)\\ &= \left(k \leq \frac{X+1}{2} < k+1\right)\\ &= (2k - 1 \leq X < 2k+1)\\ &= (X = 2k-1) \sqcup (X = 2k).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (Y = k) = (X = 2k-1) \sqcup (X = 2k).}$$

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(X = 2k-1) + \mathbf{P}(X = 2k) = pq^{2k-2} + pq^{2k-1} = pq^{2k-2}(1+q). = (1-q^2)(q^2)^{k-1}$$

En conclusion :

$$\boxed{Y \sim \mathcal{G}(1-q^2).}$$

Exercice 2

1. Par l'absurde, si $\cos(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $\cos^2\left(\frac{n}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \cos(n) = \lim_{n\to+\infty} 2\cos^2\left(\frac{n}{2}\right) - 1 = -1,$$

une contradiction.
En conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers } 0.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ et la série entière $\sum_n \frac{x^n}{n}$ a un rayon de convergence égal à 1 donc, par comparaison des rayons de convergence :

$$\boxed{R \geq 1.}$$

3. D'après la question **1**, $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 donc :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} \cos(n) \text{ diverge grossièrement.}}$$

4. La série $\sum_n a_n x^n$ et sa série dérivée $\sum_n \cos(n) x^{n-1}$ ont même rayon de convergence. Puisque la série $\sum_{n\geq 1} \cos(n)$ diverge, la série entière dérivée diverge en $x = 1$; son rayon de convergence est donc inférieur ou égal à 1, et donc $R \leq 1$.
En conclusion :

$$\boxed{R = 1.}$$

5. Pour tout x réel, on a $\sum_{n\geq 0} e^{in} x^n = \sum_{n\geq 0} (xe^i)^n$. On reconnait une série géométrique ; elle converge si, et seulement si, $\left|xe^i\right| < 1$, c'est-à-dire si, et seulement si, $|x| < 1$.
Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in} x^n = \frac{1}{1 - xe^i}.}$$

6. Pour tout $x \in]-1, 1[$ non nul, on a :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n) x^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n)x^n - 1\right] \\
&= \frac{1}{x}\left[\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in}x^n\right) - 1\right] \\
&= \frac{1}{x}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^i}\right) - 1\right] \\
&= \frac{\cos(1)-x}{x^2-2x\cos(1)+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, \quad f'(x) = \frac{\cos(1)-x}{x^2-2x\cos(1)+1}.}$$

7. Alors, pour tout x non nul

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{\cos(1)-t}{t^2-2t\cos(1)+1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x\cos(1)+1\right).$$

Cette identité est encore vérifiée en $x=0$ donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x\cos(1)+1\right).}$$

8. On montre comme en **4** que le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\cos^2\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos(n) + \frac{1}{2}$$

donc, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{n}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}\ln(1-x).$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n}x^n = -\frac{1}{4}\ln\left(x^2-2x\cos(1)+1\right) - \frac{1}{2}\ln(1-x).}$$

Exercice 3

1. On a

$$B = (3A^2 - A - I_n)A = A^\top A$$

donc $B^\top = (A^\top A)^\top = A^\top A = B$ de sorte que

$$\boxed{B \text{ est symétrique réelle.}}$$

2. La matrice B est symétrique réelle et, pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$Y^\top BY = Y^\top A^\top AY = (AY)^\top AY = \|AY\|_2^2 \geq 0$$

donc la matrice A est symétrique positive. Par caractérisation spectrale des matrices positives, on a :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+.}$$

3. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A^k)^\top = (A^\top)^k$ donc, en transposant l'identité $A^\top = 3A^2 - A - I_n$, il vient :

$$\boxed{A = 3(A^\top)^2 - A^\top - I_n.}$$

4. En remplaçant $A^\top$ par $3A^2 - A - I_n$ dans l'identité précédente, il vient :

$$A = 27A^4 - 18A^3 - 18A^2 + 7A + 3I_n$$

donc $27X^4 - 18X^3 - 18X^2 + 6X + 3$ annule A et, en divisant par 3, $9X^4 - 6X^3 - 6X^2 + 2X + 1$ annule A. On vérifie alors par simplement développement que ce dernier polynôme est égal à $(3X^2 - X - 1)^2 - X^2$. Ainsi,

$$\boxed{P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2 \text{ annule } A.}$$

5. Si P annule A, alors P annule $A^\top$. Puisque son coefficient dominant est égal à 9, on a :

$$\boxed{\frac{1}{9}P \text{ est un polynôme annulateur unitaire de } A^\top.}$$

6. En reconnaissant une identité remarquable, on a :

$$P(X) = (3X^2 - 2X - 1)(3X^2 - 1)$$

donc

$$\boxed{P(X) = 9(X-1)\left(X + \frac{1}{3}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).}$$

7. Puisque P annule A, les valeurs propres de A sont parmi les racines de P. Ainsi

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \left\{1, -\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

En particulier, 0 n'est pas valeur propre de A donc :

$$\boxed{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).}$$

8. P est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

Par ailleurs, comme observé à la question précédente :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \left\{1, -\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.}$$

9. On a

$$A^\top V = (3A^2 - A - I_n)V = 3A^2V - AV - I_nV = 3\lambda^2 V - \lambda V - V = (3\lambda^2 - \lambda - 1)V$$

et V est non nul car c'est un vecteur propre de A donc

$$\boxed{V \text{ est un vecteur propre de } A^\top.}$$

10. On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P.

10.1. On a

$$L_1(X) = \frac{(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)(X-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}.$$

En remplaçant les α_i par leurs valeurs et en simplifiant, il vient :

$$\boxed{L_1(X) = \frac{9}{8}\left(X + \frac{1}{3}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).}$$

10.2. Soient c_1, c_2, c_3, c_3 des réels tels que $\sum_{i=1}^{4} c_i L_i = 0$. Pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, en évaluant cette identité en α_i, on trouve $c_i = 0$. Ainsi la famille (L_1, L_2, L_3, L_4) est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui est un espace de dimension 4. On a donc :

$$\boxed{\mathcal{L} \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X].}$$

10.3. Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$. Posons $T(X) = \sum_{i=1}^{4} R(\alpha_i)L_i(X)$. Alors $T(\alpha_i) = R(\alpha_i)$ pour tout $i \in [\![0, 4]\!]$ donc $R - T$ admet quatre racines distinctes ; c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 donc $R - T = 0$. Ainsi,

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{4} R(\alpha_i)L_i(X).}$$

11.

11.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

11.1.1. La division euclidienne de X^k par le polynôme P s'écrit

$$X^k = PQ + R$$

avec $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $R \in \mathbb{R}_3[X]$.
En évaluant cette égalité en les α_i, il vient :

$$\forall i \in [\![1, 4]\!], \quad R(\alpha_i) = \alpha_i^k$$

donc, d'après **10.3**, on a :

$$\boxed{R(X) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^k L_i(X).}$$

11.1.2. Puisque P est annulateur de A, en évaluant l'identité $X^k = PQ + R$ en A, il vient :

$$\boxed{A^k = R(A) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^k L_i(A).}$$

11.2. Puisque $\alpha_1 = 1$ et $|\alpha_i| < 1$ pour $i \in [\![2, 4]\!]$, on a

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} A^k = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^k L_i(A) = L_1(A).}$$

Montrons que la limite est une matrice de projection. Puisque A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)P^{-1}$$

où $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Alors

$$A^k = P\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \lambda_1^k, \ldots, \lambda_p^k)P^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} P\,\underbrace{\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)}_{=D}\,P^{-1}.$$

On a $D^2 = D$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k$ est une matrice de projection.

Exercice 4

1. Si J est un segment et $f \in C^1(J)$, alors $f' \in C^0(J)$ donc f' est bornée sur J. On note $\|f'\|_\infty$ la borne supérieure de $|f'|$ sur J.
Il suit de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x,y) \in J^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \left\|f'\right\|_\infty |x-y|$$

donc

$$\boxed{f \text{ est lipschitzienne.}}$$

2. Soit f une fonction k-lipschitzienne sur un intervalle I, avec $k > 0$. Soit $\epsilon > 0$ et $\eta = \dfrac{\epsilon}{k} > 0$. Alors pour tout $(x,y) \in I^2$,

$$|x-y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y| = k\eta = \epsilon$$

donc

$$\boxed{f \text{ est uniformément continue sur } I.}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque f est continue et g est continue par morceaux, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f(x-t)g(t)| \leq \|f\|_\infty\,|g(t)|$$

mais $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ donc, par domination, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
En conclusion :

$$\boxed{\forall (f,g) \in E \times F, \quad f \star g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque

L'application $f \star g$ s'appelle *produit de convolution*, ou *convolée*, de f et de g. Le produit de convolution joue un rôle important en analyse réelle et en probabilités continues. Aucune connaissance à son sujet n'est exigible en MP.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto x - t$ est C^1 strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc, en effectuant le changement de variable $u = x - t$, on a :

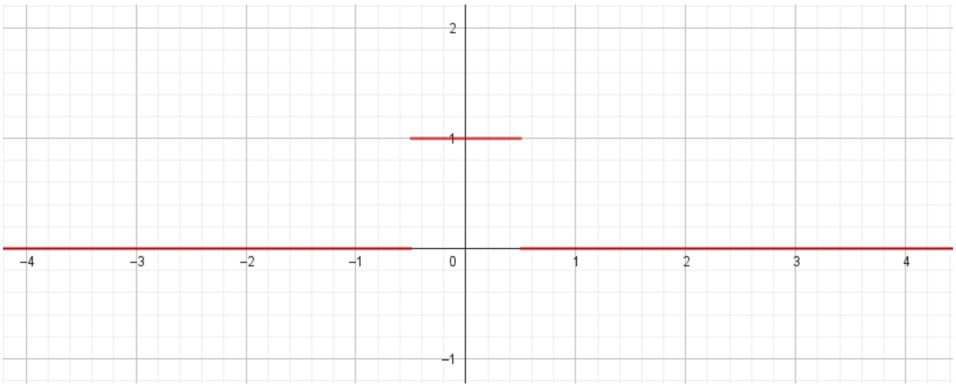
$$(g \star f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u = (f \star g)(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{f \star g = g \star f.}$$

5. On pose $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

5.1. La représentation graphique de la fonction f_1 est :



5.2. La fonction f_1 est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas continue. Elle présente en effet des discontinuités en $-\dfrac{1}{2}$ et en $\dfrac{1}{2}$ puisque

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} f_1(x) = 0 \neq 1 = f_1\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f_1(x) = 0 \neq 1 = f_1\left(\frac{1}{2}\right).$$

On observe aussi que $|f_1| \leq 1$ donc

$$\boxed{f_1 \in E \setminus C^0(\mathbb{R}).}$$

6. Étude de $f_1 \star g$.

6.1. Puisque $f_1 \in E$ et $g \in F$, il suit de la question **3** que :

$$\boxed{f_1 \star g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

6.2. Supposons que g est k-lipschitzienne. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
|(f_1 \star g)(x) - (f_1 \star g)(y)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) g(x-t) - f_1(t) g(y-t) \, \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)(g(x-t) - g(y-t))| \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} |g(x-t) - g(y-t)| \, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_{-1/2}^{1/2} k\,|(x-t) - (y-t)| \, \mathrm{d}t \\
&\leq |x-y| \int_{-1/2}^{1/2} k \, \mathrm{d}t \\
&= k\,|x-y|.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(f_1 \star g)$ est k-lipschitzienne et donc

$$\boxed{f_1 \star g \text{ est uniformément continue.}}$$

6.3. Pour tout x réel, on a :

$$(f_1 \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

mais

$$x - t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow t \in \left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right]$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_1 \star g)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

6.4. Si g est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive G de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente et le théorème fondamental de l'analyse, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_1 \star g)(x) = G\left(x + \frac{1}{2}\right) - G\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

donc, par composition,

$$\boxed{f_1 \star g \in C^1(\mathbb{R})}$$

et, par dérivation des fonctions composées, on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_1 \star g)'(x) = g\left(x + \frac{1}{2}\right) - g\left(x - \frac{1}{2}\right).}$$

7.

7.1. On a déjà observé que $f_1 \in E$. D'autre part, f_1 est nulle en dehors du segment $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sur lequel elle est continue ; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f_1 \in E \cap F$ et, d'après la question **3** :

$$\boxed{f_1 \star f_1 \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

7.2. D'après **6.3**, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f_1 \star f_1)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t)\,\mathrm{d}t.$$

— Si $x < -1$ ou $x > 1$, $\left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right] \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \emptyset$ donc $(f_1 \star f_1)(x) = 0$.

— Si $-1 \leq x \leq 0$, on a

$$(f_1 \star f_1)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = x + 1.$$

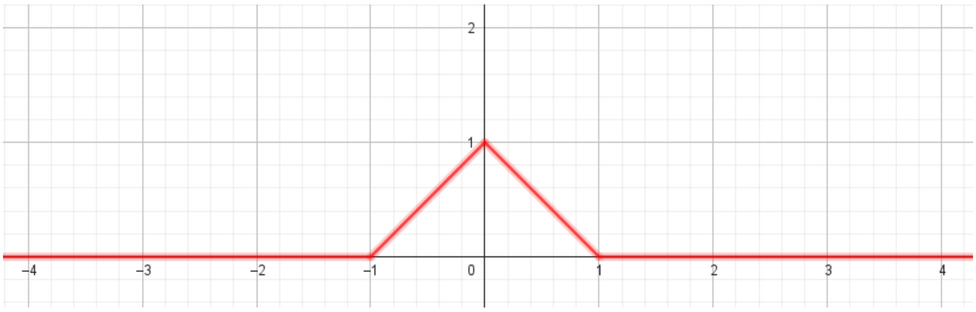
— Si $0 < x \leq 1$, on a

$$(f_1 \star f_1)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = 1 - x.$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_1 \star f_1)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1+x & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}}$$

7.3. La représentation graphique de la fonction $f_1 \star f_1$ est :



7.4. La fonction f_1 est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Par ailleurs

$$\lim_{x\to -1^-} (f_1 \star f_1)(x) = \lim_{x\to -1^-} 0 = 0 = \lim_{x\to -1^+} (1+x) = \lim_{x\to -1^+} (f_1 \star f_1)(x)$$

et $f(-1) = 0$ donc $(f_1 \star f_1)$ est continue en -1.

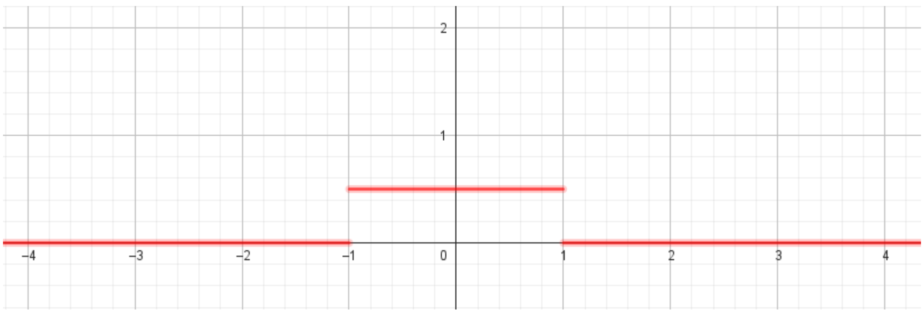
On vérifie de la même manière que $(f_1 \star f_1)$ est continue en 0 et en 1.

En conclusion :

$$\boxed{f_1 \star f_1 \in C^0(\mathbb{R}).}$$

8.

8.1. La représentation graphique de la fonction h_2 est :



8.2. h_α est nulle en dehors sur segment $\left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$ où elle est continue et constante égale à $\frac{1}{\alpha}$. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{\alpha} = 1.$$

On a donc bien

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 1.}$$

8.3. Soit x_0 un point de continuité de g. Pour tout $\alpha > 0$, en reprenant des calculs analogues à ceux effectués en **6.3**, on a :

$$(h_\alpha \star g)(x_0) = \frac{1}{\alpha}\int_{x_0-\frac{\alpha}{2}}^{x_0+\frac{\alpha}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{G\left(x_0+\frac{\alpha}{2}\right) - G\left(x_0-\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha}$$

où $G : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Puisque g est continue en x_0, le théorème fondamental de l'analyse (ou sa démonstration, cela dépend de l'énoncé retenu) montre que :

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{G\left(x_0+\frac{\alpha}{2}\right) - G\left(x_0-\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha} = g(x_0),$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(h_\alpha \star g)(x_0) = g(x_0).}$$

9.

9.1. Soit $h \in E$ et $g \in F$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|(h\star g)(x)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t| \leq \|h\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\ \mathrm{d}t = \|h\|_\infty \|g\|_1 .$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{\forall (h,g) \in E\times F, \quad \|h\star g\|_\infty \leq \|h\|_\infty \|g\|_1 .}$$

9.2. g étant fixée, l'inégalité obtenue à la question précédente montre que

$$\forall h \in E, \quad \|\Phi(h)\|_\infty \leq \|g\|_1 \|h\|_\infty$$

donc :

$$\boxed{\Phi \text{ est une application linéaire continue sur } (E, \|\cdot\|_\infty).}$$

9.3. Puisque l'on a :

$$\forall h \in E, \quad \|\Phi(h)\|_\infty \leq \|g\|_1 \|h\|_\infty$$

on peut affirmer que

$$\boxed{|||\Phi||| \leq \|g\|_1 .}$$

10. Soit $\epsilon > 0$.

Notons $K = [-A, A]$. Puisque f est continue par morceaux, nulle en dehors du compact K, elle est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|x-y| \leq \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Mieux, on peut observer que l'on a l'inégalité :

$$|x-y| \leq \eta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(y)| \leq \epsilon(\mathbb{1}_K(x) + \mathbb{1}_K(v)),$$

la preuve se faisant par disjonction de cas.
Alors

$$\begin{aligned} |(f \star g)(x) - (f \star g)(y)| \leq & \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)|\,|g(t)| \ \mathrm{d}t \\ & \epsilon\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_K(x-t)\,|g(t)| \ \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_K(y-t)\,|g(t)| \ \mathrm{d}t\right) \\ & 2\epsilon\,\|g\|_\infty \times 2A \end{aligned}$$

car K est de longueur $2A$.
Puisque $\|g\|_\infty$ et A sont des constantes (que l'on peut supposer strictement positives), quitte à prendre le pas de continuité η associé à $\dfrac{\epsilon}{4A\,\|g\|_\infty}$, on a établi l'uniforme continuité.
En conclusion :

$$\boxed{f \star g \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque

Ce dernier résultat montre une propriété particulièrement intéressante du produit de convolution, à savoir qu'il est plus régulier que les fonctions données pour le construire. Cette propriété, dite de *régularisation*, est valable dans un contexte bien plus général que celui étudié ici.

Dans les concours: Produit de convolution

Pour une étude plus approfondie du produit de convolution, on pourra consulter le sujet Centrale MP 2012 Mathématiques 1.
Pour aller encore plus loin, on pourra aussi consulter le second problème du sujet X-ENS MP 2018 Mathématiques C.

*** Fin du sujet ***