E3A - MP 2024 - Mathématiques

Durée : 4h

Exercice 1

Pour tout réel x, on rappelle que la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif k vérifiant :

$$k \leq x < k+1.$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0,1[$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y, la variable aléatoire définie par :

$$Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor.$$

1. Représenter dans un repère orthonormal la fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit k un entier naturel non nul.
   Écrire l'événement $(Y = k)$ à l'aide d'événements $(X = j)$ où j est un entier naturel non nul.
4. Déterminer la loi de Y.

Exercice 2

1. **Question préliminaire**.
   En utilisant l'égalité $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

On considère la série entière $\sum\limits_{n \geq 1} a_n x^n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\cos(n)}{n}.$$

On note R son rayon de convergence.

2. Montrer que $R \geq 1$.
3. Prouver que la série de terme général $\cos(n)$ diverge.
4. En déduire la valeur de R.
   On note alors, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n} x^n$.
5. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière définie par : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{in} x^n$, où i désigne le nombre complexe usuel tel que $i^2 = -1$.
6. En déduire une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.
7. Déterminer alors une expression de la somme de la série entière proposée à l'aide de fonctions usuelles.
8. En déduire le rayon de convergence et la somme $g(x)$ de la série entière $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n} x^n$.

Exercice 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^\top = 3A^2 - A - I_n$ où $A^\top$ désigne la matrice transposée de la matrice A.

1. Démontrer que la matrice $B = 3A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.

2. Montrer que les valeurs propres de B sont réelles, positives ou nulles.
On pourra étudier le signe de $Y^\top BY$ pour un vecteur Y de $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que l'on a : $A = 3(A^\top)^2 - A^\top - I_n$.

4. En déduire que le polynôme $P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice A.

5. Déterminer un polynôme unitaire annulateur de $A^\top$.

6. Factoriser P en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

7. La matrice A est-elle inversible ?

8. Établir que la matrice A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres possibles.

9. Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé.
Montrer que V est aussi vecteur propre de $A^\top$.

10. On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P.
On appelle $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ la famille des polynômes de Lagrange associés à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ de $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels, tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2, \quad L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j} \quad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{(symbole de Kronecker).}$$

10.1. Déterminer L_1 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

10.2. Vérifier que $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

10.3. Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme R dans la base $\mathcal{L}$.

11. Étude des puissances de A.

11.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

11.1.1. Exprimer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme P dans la base $\mathcal{L}$.

11.1.2. En déduire une expression de A^k.

11.2. Démontrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.
Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice A et des $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$.

Exercice 4

Questions préliminaires

1. Démontrer qu'une fonction f de classe C^1 sur un segment J est lipschitzienne sur J.

2. Démontrer qu'une fonction k-lipschitzienne sur un intervalle I est uniformément continue sur cet intervalle.

*****

Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que : $\forall g \in F$, $\|g\|_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt$ et $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$ définissent des normes respectivement sur les espaces F et E.

Soient $g \in F$ et $f \in E$.

3. Montrer que la fonction

$$x \mapsto (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

est bien définie sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que $f \star g = g \star f$.

5. On pose $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

5.1. Représenter la fonction f_1 dans un repère orthonormal.

5.2. La fonction f_1 est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

6. Étude de $f_1 \star g$.

6.1. Montrer que $f_1 \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

6.2. Si g est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, prouver que la fonction $f_1 \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

6.3. Démontrer que pour tout x réel :

$$(f_1 \star g)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} g(u)\,\mathrm{d}u.$$

6.4. Si g est continue sur $\mathbb{R}$, prouver que $f_1 \star g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

7. Étude de $f_1 \star f_1$.

7.1. Justifier que $f_1 \star f_1$ existe.

7.2. Déterminer l'expression de $(f_1 \star f_1)(x)$ suivant les valeurs du réel x.

7.3. Représenter la fonction $f_1 \star f_1$ dans un repère orthonormal.

7.4. La fonction $f_1 \star f_1$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

8. Soit α un réel strictement positif.

On note h_α la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha} f_1\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$.

8.1. Représenter graphiquement la fonction h_2 dans un repère orthonormal.

8.2. Vérifier que l'on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

8.3. Soit x_0 un point en lequel la fonction g est continue.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} (h_\alpha \star g)(x_0) = g(x_0)$.

9. Étude d'une norme subordonnée.

9.1. Montrer que pour tout h dans E : $\|h \star g\|_\infty \leq \|g\|_1 \, \|h\|_\infty$.

9.2. Montrer que l'endomorphisme Φ de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ qui à tout h associe à $h \star g$ est continu.

9.3. En déduire une majoration de $|||\Phi|||$ (norme subordonnée de Φ).

10. On suppose dans cette question que g est une fonction bornée, continue par morceaux et que f vérifie la propriété :

$$\exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \text{ vérifiant } |x| \geq A, \quad f(x) = 0.$$

Montrer que $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

*** Fin du sujet ***