Mines-Ponts - MP/MPI 2024 - Mathématiques 1

Éléments de correction

Partie I : Calcul d'une intégrale

1. Puisque $\theta \in]-\pi, \pi[$, $e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ donc, pour tout $t > 0$, $1 + te^{i\theta} \neq 0$. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et continue comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.

<u>En $+\infty$:</u> on a $\left|1 + te^{i\theta}\right| = |t| \left|1 + \frac{e^{i\theta}}{t}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} |t| = t$ donc

$$|f(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-x}}$$

mais $x < 1$ donc $2 - x > 1$ de sorte que $f \in \mathcal{L}^1([1, +\infty[, \mathbb{C})$.

<u>En 0 :</u> on a $\left|1 + te^{i\theta}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} 1$ donc

$$|f(t)| \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

mais $x > 0$ donc $1 - x < 1$ de sorte que $f \in \mathcal{L}^1(]0, 1], \mathbb{C})$.

En conclusion :

$$\boxed{f \in \mathcal{L}^1(]0, +\infty[, \mathbb{C}).}$$

2. Posons

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\pi;\pi[\times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\theta, t) & \longmapsto & \dfrac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} \end{array} \right.$$

de sorte que, pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$, on a

$$r(\theta) = \int_0^{+\infty} \psi(\theta, t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $t > 0$, $\theta \mapsto \varphi(\theta, t) \in C^1(]-\pi;\pi[\,, \mathbb{C})$ et

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\theta, t) = -\frac{ie^{i\theta}t^x}{(1 + te^{i\theta})^2}$$

donc

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\theta, t)\right| = \frac{t^x}{\left|1 + te^{i\theta}\right|^2}.$$

Mais pour tout $\beta \in]0;\pi[$ et pour tout $\theta \in [-\beta;\beta]$, on a $\cos(\theta) \geq \cos(\beta)$ donc

$$\left|1 + te^{i\theta}\right|^2 = (1 + t\cos(\theta))^2 + (t\sin(\theta))^2 = 1 + t^2 + 2t\cos(\theta) \geq 1 + t^2 + 2t\cos(\beta) = \left|1 + te^{i\beta}\right|^2$$

et donc

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\theta, t)\right| = \underbrace{\frac{t^x}{\left|1 + te^{i\beta}\right|^2}}_{=\varphi_\beta(t)}.$$

La fonction φ_β est continue sur $[0, +\infty[$ et

$$\varphi_\beta(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-x}}$$

et $2-x>1$ donc $\varphi_\beta \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$. Il suit du théorème de dérivation de Leibniz que $r \in C^1\left([-\beta;\beta], \mathbb{C}\right)$ et, pour tout $\theta \in [-\beta;\beta]$,

$$r'(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta, t)\,\mathrm{d}t = -ie^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai pour tout $\beta \in]0,\pi[$, on peut affirmer que :

$$\boxed{r \in C^1\left([-\pi;\pi], \mathbb{C}\right) \quad \text{et} \quad \forall \theta \in [-\beta;\beta],\ r'(\theta) = -ie^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\,\mathrm{d}t.}$$

3. Pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$, on a :

$$g(\theta) = e^{ix\theta} r(\theta)$$

donc g est de classe C^1 sur $]-\pi;\pi[$ par produit de fonctions C^1 et, pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$, on a :

$$\begin{aligned}
g'(\theta) &= ixe^{ix\theta} r(\theta) + e^{ix\theta} r'(\theta) \\
&= ixe^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}\,\mathrm{d}t - e^{ix\theta} ie^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\,\mathrm{d}t \\
&= ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \frac{xt^{x-1}}{1+te^{i\theta}} - \frac{e^{i\theta} t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\,\mathrm{d}t \\
&= ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \frac{(1+te^{i\theta})xt^{x-1} - e^{i\theta} t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\,\mathrm{d}t \\
&= ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t^x}{1+te^{i\theta}}\right)\mathrm{d}t \\
&= ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} h'(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{g \in C^1(]-\pi;\pi[, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \forall \theta \in]-\pi;\pi[,\ g'(\theta) = ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} h'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

D'autre part, on a $h(0) = 0$ et

$$h(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{t^x}{te^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{t^{1-x}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

donc $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = 0$.
Alors, pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$, on a :

$$g'(\theta) = ie^{ix\theta}\left(\lim_{t \to +\infty} h(t) - h(0)\right) = 0.$$

En particulier,

$$\boxed{g \text{ est constante sur }]-\pi;\pi[.}$$

4. Soit $\theta \in]0;\pi[$. On a

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2i} g(\theta)(e^{ix\theta} - e^{-ix\theta}) = \frac{1}{2i}\left(g(\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}\right)$$

mais g est constante sur $]-\pi;\pi[$ donc $g(-\theta) = g(\theta)$ et donc

$$\boxed{\forall \theta \in]0;\pi[, \quad g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2i}\left(g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}\right).}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\left(g(-\theta)e^{ix\theta}-g(\theta)e^{-ix\theta}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+te^{-i\theta}}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\frac{t^x(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{\left|1+te^{i\theta}\right|^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{1+2t\cos(\theta)+t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall\theta\in\,]0;\pi[\,,\quad g(\theta)\sin(x\theta)=\sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{1+2t\cos(\theta)+t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

5. Pour tout $\theta\in\,]0;\pi[$, $\sin(\theta)>0$ donc on peut effectuer le changement de variable $t=u\sin(\theta)-\cos(\theta)$ ou, de manière équivalente $u=\dfrac{t}{\sin(\theta)}+\operatorname{cotan}(\theta)$ qui induit une bijection croissante de classe C^1 de $[0,+\infty[$ vers $[\operatorname{cotan}(\theta),+\infty[$.
Avec les notations différentielles usuelles, on a $\mathrm{d}t=\sin(\theta)\,\mathrm{d}u$ et

$$1+t^2+2t\cos(\theta)=1+(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^2+2(u\sin(\theta)-\cos(\theta))\cos(\theta)=\sin^2(\theta)(1+u^2).$$

En injectant dans l'intégrale, il vient donc :

$$\sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{1+2t\cos(\theta)+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{\operatorname{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Ainsi, il suit de la question **4** que :

$$\boxed{\forall\theta\in\,]0;\pi[\,,\quad g(\theta)\sin(x\theta)=\int_{\operatorname{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.}$$

6. Pour tout $\theta\in\,]0;\pi[$, on pose

$$f_\theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ u&\longmapsto&\mathbb{1}_{[\operatorname{cotan}(\theta),+\infty[}(u)\dfrac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\end{array}\right..$$

On a $\lim\limits_{\theta\to\pi^-}\operatorname{cotan}(\theta)=-\infty$ donc, pour tout $u\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{\theta\to\pi^-}f_\theta(u)=\frac{1}{1+u^2}.$$

Par ailleurs, pour tout $\theta\in\,]0;\pi[$ et pour tout $u\in\mathbb{R}$, on a :

$$|f_\theta(u)|\leq\left|\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\right|\leq\underbrace{\frac{1+|u|^x}{1+u^2}}_{=\varphi(u)}$$

et $\varphi\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifie $\varphi(u)\underset{u\to\pm\infty}{\sim}\dfrac{1}{|u|^{2-x}}$ et $2-x>1$ donc $\varphi\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
D'après l'extension du théorème de convergence dominée aux familles de fonctions dépendant d'un paramètre continu, on a :

$$\lim_{\theta\to\pi^-}\int_{-\infty}^{+\infty}f_\theta(u)\,\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2},$$

et donc, d'après l'identité établie en **5** :

$$\boxed{\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.}$$

7. Puisque g est constante sur $]-\pi;\pi[$, on a $\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta) = g(0)$ et $g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
D'autre part, $\theta \mapsto \sin(x\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim_{\theta\to\pi^-} \sin(x\theta) = \sin(\pi x)$.
Ainsi, il suit de la question **6** que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \sin(\pi x) \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Mais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = [\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Alors, puisque $x \in]0,1[$, $\sin(\pi x)$ ne s'annule pas et on a bien :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.}$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

8. Par relation de Chasles pour les intégrales généralisées convergentes, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

mais en effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, qui est C^1 strictement décroissant de $[1,+\infty[$ vers $]0,1]$, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{+\infty} \frac{(1/t)^{1-x}}{\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{u^{1-x}}{u+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u}\,\mathrm{d}u.$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

et, par linéarité :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\mathrm{d}t.}$$

9. Sous réserve de pouvoir intervertir les signes somme et intégrale, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 t^{x-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{x+k-1}\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \int_0^1 t^{x+k-1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[\frac{t^{x+k}}{x+k} \right]_0^1$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}.$$

Justifions maintenant l'interversion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, 1[$, on pose

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{x+k-1} \quad \text{et} \quad R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{x+k-1}.$$

En utilisant l'expression classique du reste d'une série géométrique convergente, on a $R_n(t) = \dfrac{(-1)^{n+1} t^{x+n}}{1+t}$ et donc

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{x+k-1}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 (S_n(t) + R_n(t))\, \mathrm{d}t = \int_0^1 S_n(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^1 R_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 S_n(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{x+n}}{1+t}\, \mathrm{d}t$$

mais, pour tout $t \in [0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} t^{x+n}}{1+t} \right| \leq \frac{1}{1+t}$$

donc, par convergence dominée

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{x+n}}{1+t}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{x+n}}{1+t}\, \mathrm{d}t = 0$$

Ainsi, on a bien :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{x+k-1}\, \mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 S_n(t)\, \mathrm{d}t$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{x+k-1}\, \mathrm{d}t$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{x+k-1}\, \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{x+k-1}\, \mathrm{d}t,$$

ce qui justifie l'interversion.
En conclusion :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}.}$$

10. On part de l'égalité établie en **8** :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t} \right) \mathrm{d}t.$$

On a établi en **9** que :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

Pour le membre de droite, on observe que, pour tout $t \in [0, 1[$, on a :

$$\frac{t^{-x}}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{n-x}$$

et un raisonnement analogue à celui mené à la question **8** montre que

$$\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{n-x}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-x+1}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-x+1}.}$$

11. On injecte le résultat précédent dans l'identité établie à la question **7** :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin(\pi x)} &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)-x} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-x} \\
&= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x} \right) \\
&= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{n^2 - x^2}.
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2}.}$$

12. Soit $y \in]0, \pi[$ et $x = \dfrac{y}{\pi} \in]0, 1[$ de sorte que $y = \pi x$. En multipliant l'identité trouvée à la question **11** par x, on a :

$$\frac{y}{\sin(y)} = \frac{\pi x}{\sin(\pi x)} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x^2}{n^2 - x^2}.$$

En multipliant par $\sin(y)$ et en divisant par y et en remplaçant x par $\dfrac{y}{\pi}$, on obtient :

$$1 = \frac{\sin(y)}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{n^2\pi^2 - y^2}.$$

donc

$$\boxed{1 - \frac{\sin(y)}{y} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{y^2 - n^2\pi^2}.}$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13. $t \mapsto \dfrac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2} \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[,\mathbb{R}_+)$.

<u>En $+\infty$:</u>

$$\frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc, par comparaison, $t \mapsto \dfrac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2} \in \mathcal{L}^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$.

<u>En 0 :</u> Un développement limité à l'ordre 2 du cosinus en 0 et un binôme de Newton permettent d'affirmer que

$$\frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{2p+1}{2}$$

donc l'intégrale est faussement impropre en 0.

En conclusion :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Une intégration par parties généralisée, justifiée par la convergence de tous les termes impliqués montre que :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\times(1-\cos^{2p+1}(t))\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1}{t}\times(2p+1)\sin(t)\cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (2p+1)\int_0^{+\infty}\cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty}\cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.}$$

14. On commence par effectuer le changement de variable $u = t - n\pi$ et avec la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2+(n-1)\pi}^{\pi/2+n\pi}\cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2p}(u)\frac{(-1)^n\sin(u)}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\pi/2}^{0}\cos^{2p}(u)\frac{(-1)^n\sin(u)}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi/2}\cos^{2p}(u)\frac{(-1)^n\sin(u)}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable $v = -u$ dans la première intégrale puis, par linéarité de l'intégrale, factorisation et mise sous le même dénominateur, il vient :

$$\boxed{\int_{\pi/2+(n-1)\pi}^{\pi/2+n\pi}\cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\cos^{2p}(t)\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t.}$$

15. D'après la relation de Chasles et la question précédente, sous réserve de pouvoir intervertir les signes somme et intégrale, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{+\infty}\cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\pi/2+(n-1)\pi}^{\pi/2+n\pi}\cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\cos^{2p}(t)\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} \right) \mathrm{d}t$$

L'interversion est justifiée par la convergence normale de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2}$ sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

16. D'après la relation de Chasles et les questions **12** et **15**, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{+\infty} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \left(1 - \frac{\sin(t)}{t} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \,\mathrm{d}t.}$$

17. Avec la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}
\cos^{2p}(t) &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{ikt} e^{i(k-2p)t} \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)t} \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)t} + \sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)t} \right)
\end{aligned}$$

Mais, en effectuant le changement d'indice $\ell = 2p - k$ dans la dernière somme, on a :

$$\sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)t} = \sum_{\ell=0}^{p-1} \binom{2p}{2p-\ell} e^{2i(p-\ell)t} = \sum_{\ell=0}^{p-1} \binom{2p}{\ell} e^{2i(p-\ell)t}$$

donc, en réinjectant

$$\cos^{2p}(t) = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \underbrace{\left[e^{2i(k-p)t} + e^{2i(p-k)t} \right]}_{=2\cos((p-k)t)} \right).$$

On a donc bien :

$$\boxed{\cos^{2p}(t) = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2i(p-k)t) \right).}$$

18. En combinant les questions **13**, **16** et **17**, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^{2p+1}(t)}{t^2} \,\mathrm{d}t = (2p+1) \int_0^{+\infty} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
&= (2p+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t\\
&= (2p+1)\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos(2i(p-k)t)\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{2p+1}{2^{2p}}\frac{\pi}{2}\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos(2i(p-k)t)\,\mathrm{d}t}_{=0}\\
&= \frac{\pi}{2}\frac{2p+1}{2^{2p}}\frac{(2p)!}{(p!)^2}
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}.}$$

Partie IV : Calcul de $\mathbf{E}\left[|S_n|\right]$

19. Les variables aléatoires X_k et S_n étant finies, elles admettent des moments finis à tout ordre. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{E}[X_k] = 0$ et $\mathbf{V}(X_k) = \mathbf{E}\left[X_k^2\right] = \mathbf{E}[1] = 1$. Ainsi, les X_k sont centrées et réduites.
Par linéarité de l'espérance, on a donc :

$$\mathbf{E}[S_n] = \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[X_k] = 0$$

et, par indépendance des X_k, on a :

$$\mathbf{V}(S_n) = \mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) = n.$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathbf{E}[S_n] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(S_n) = n.}$$

20. Si T et $-T$ suivent la même loi, alors $\sin(T)$ et $\sin(-T) = -\sin(T)$ suivent la même loi donc $\mathbf{E}[\sin(T)] = \mathbf{E}[-\sin(T)] = -\mathbf{E}[\sin(T)]$ et donc $\mathbf{E}[\sin(T)] = 0$.
D'autre part,

$$\cos(S+T) = \cos(S)\cos(T) - \sin(S)\sin(T)$$

mais S et T sont indépendantes donc, d'après le lemme des coalitions, $\cos(S)$ est indépendante de $\cos(T)$ et $\sin(S)$ est indépendante de $\sin(T)$. Par multiplicativité de l'espérance pour des variables aléatoires indépendantes, on a donc :

$$\mathbf{E}[\cos(S+T)] = \mathbf{E}[\cos(S)]\,\mathbf{E}[\cos(T)] - \mathbf{E}[\sin(S)]\underbrace{\mathbf{E}[\sin(T)]}_{=0}$$

donc :

$$\boxed{\mathbf{E}[\cos(S+T)] = \mathbf{E}[\cos(S)]\,\mathbf{E}[\cos(T)].}$$

21. La propriété précédente se généralise à n variables aléatoires indépendantes par une récurrence immédiate. D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k et X_{-k} suivant la même loi. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{E}[\cos(tS_n)] = \mathbf{E}\left[\cos\left(\sum_{k=1}^n tX_k\right)\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\cos(tX_1)\right]^n$$
$$= \left[\frac{1}{2}\cos(-t) + \frac{1}{2}\cos(t)\right]^n$$
$$= \cos^n(t).$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}\left[\cos(tS_n)\right] = \cos^n(t).}$$

22. On raisonne par disjonction de cas sur le signe de a :

— Si $a > 0$, $\text{signe}(a) = 1$ et, puisque $|b| \leq |a|$, on a $a + b > 0$ donc
$$|a + b| = a + b = |a| + \text{signe}(a)b.$$

— Si $a < 0$, $\text{signe}(a) = -1$ et, puisque $|b| \leq |a|$, on a $a - b < 0$ donc
$$|a + b| = -a - b = |a| + \text{signe}(a)b.$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad \left(|b| \leq |a| \implies |a + b| = |a| + \text{signe}(a)b\right).}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On commence par observer que S_n prend ses valeurs dans $[\![-n; n]\!]$ et S_n ne peut prendre la valeur 0 que si n est pair (il faut autant de X_k égales à -1 que de X_k égales à 1 pour que la somme soit nulle). Ainsi,

$$|S_{2n-1}| \geq 1 = |X_{2n}|$$

donc, d'après ce qui précède :

$$|S_{2n}| = |S_{2n-1} + X_{2n}| = |S_{2n-1}| + \text{signe}(S_{2n-1})X_{2n}$$

mais, d'après le lemme des coalitions, X_{2n} et $\text{signe}(S_{2n-1})$ sont indépendantes donc :

$$\mathbf{E}\left[|S_{2n}|\right] = \mathbf{E}\left[|S_{2n-1}|\right] + \mathbf{E}\left[\text{signe}(S_{2n-1})\right] \underbrace{\mathbf{E}\left[X_{2n}\right]}_{=0}$$

donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}\left[|S_{2n}|\right] = \mathbf{E}\left[|S_{2n-1}|\right].}$$

23. Posons $I_s = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2}\, \mathrm{d}t$.

— Si $s = 0$, $I_0 = 0$ donc la propriété est vérifiée.

— Si $s > 0$, le changement de variable $u = st$ est C^1 strictement croissant de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$ et on obtient :
$$I_s = \int_0^{+\infty} s\frac{1 - \cos(st)}{(st)^2}\, s\mathrm{d}t = s\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2}\, \mathrm{d}u$$
On reconnaît l'intégrale calculée en 18 dans le cas où $p = 0$. On a donc $I_s = s\dfrac{\pi}{2}$.

— Si $s < 0$, , le changement de variable $u = st$ est C^1 strictement croissant de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$ et on obtient de même $I_s = -s\dfrac{\pi}{2}$.

En conclusion :

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t = |s|\,\frac{\pi}{2}.}$$

24. En appliquant l'identité précédente à $s = S_n(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$|S_n| = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En passant à l'espérance, sous réserve que l'on puisse intervertir espérance et intégrale, il suit de **21** que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[|S_n|\right] &= \frac{2}{\pi}\mathbf{E}\left[\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathbf{E}\left[\cos(tS_n)\right]}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Justifions maintenant l'interversion. Posons $\varphi : s \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. On a

$$\mathbf{E}\left[\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right] = \mathbf{E}\left[\varphi(S_n)\right]$$

donc, d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right] &= \mathbf{E}\left[\varphi(S_n)\right] \\
&= \sum_{s\in S_n(\Omega)} \varphi(s)\mathbf{P}\left(S_n = s\right) \\
&= \sum_{s\in S_n(\Omega)} \mathbf{P}\left(S_n = s\right)\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{s\in S_n(\Omega)} \mathbf{P}\left(S_n = s\right)\frac{1-\cos(st)}{t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbf{E}\left[\frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\mathbf{E}\left[|S_n|\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

25. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il suit de **22**, **24** et **18** que

$$\mathbf{E}\left[|S_{2n}|\right] = \mathbf{E}\left[|S_{2n-1}|\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^{2n-1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{E}\left[|S_{2n}|\right] = \mathbf{E}\left[|S_{2n-1}|\right] = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}.}$$

*** Fin du sujet ***