

Éléments de correction

**Partie I : Calcul d'une intégrale**

1. Puisque  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ ,  $e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  donc, pour tout  $t > 0$ ,  $1 + te^{i\theta} \neq 0$ . Ainsi  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et continue comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.

En  $+\infty$  : on a  $|1 + te^{i\theta}| = |t| \left| 1 + \frac{e^{i\theta}}{t} \right| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} |t| = t$  donc

$$|f(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-x}}$$

mais  $x < 1$  donc  $2 - x > 1$  de sorte que  $f \in \mathcal{L}^1([1, +\infty[, \mathbb{C})$ .

En 0 : on a  $|1 + te^{i\theta}| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 1$  donc

$$|f(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

mais  $x > 0$  donc  $1 - x < 1$  de sorte que  $f \in \mathcal{L}^1(]0, 1], \mathbb{C})$ .

En conclusion :

$$f \in \mathcal{L}^1(]0, +\infty[, \mathbb{C}).$$

2. Posons

$$\psi : \begin{cases} ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (\theta, t) & \longmapsto \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} \end{cases}$$

de sorte que, pour tout  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , on a

$$r(\theta) = \int_0^{+\infty} \psi(\theta, t) dt.$$

Pour tout  $t > 0$ ,  $\theta \mapsto \varphi(\theta, t) \in C^1(]-\pi, \pi[, \mathbb{C})$  et

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta, t) = -\frac{ie^{i\theta} t^x}{(1 + te^{i\theta})^2}$$

donc

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta, t) \right| = \frac{t^x}{|1 + te^{i\theta}|^2}.$$

Mais pour tout  $\beta \in ]0, \pi[$  et pour tout  $\theta \in [-\beta, \beta]$ , on a  $\cos(\theta) \geq \cos(\beta)$  donc

$$|1 + te^{i\theta}|^2 = (1 + t \cos(\theta))^2 + (t \sin(\theta))^2 = 1 + t^2 + 2t \cos(\theta) \geq 1 + t^2 + 2t \cos(\beta) = |1 + te^{i\beta}|^2$$

et donc

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta, t) \right| = \frac{t^x}{\underbrace{|1 + te^{i\beta}|^2}_{=\varphi_\beta(t)}}.$$

La fonction  $\varphi_\beta$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et

$$\varphi_\beta(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-x}}$$

et  $2 - x > 1$  donc  $\varphi_\beta \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ . Il suit du théorème de dérivation de Leibniz que  $r \in C^1([-\beta, \beta], \mathbb{C})$  et, pour tout  $\theta \in [-\beta, \beta]$ ,

$$r'(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta, t) dt = -ie^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2} dt.$$

Ceci étant vrai pour tout  $\beta \in ]0, \pi[$ , on peut affirmer que :

$$r \in C^1([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \forall \theta \in [-\beta, \beta], \quad r'(\theta) = -ie^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2} dt.$$

3. Pour tout  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , on a :

$$g(\theta) = e^{ix\theta} r(\theta)$$

donc  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $]-\pi, \pi[$  par produit de fonctions  $C^1$  et, pour tout  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , on a :

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= ix e^{ix\theta} r(\theta) + e^{ix\theta} r'(\theta) \\ &= ix e^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} dt - e^{ix\theta} ie^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2} dt \\ &= ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \frac{xt^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} - \frac{e^{i\theta} t^x}{(1 + te^{i\theta})^2} dt \\ &= ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \frac{(1 + te^{i\theta})xt^{x-1} - e^{i\theta} t^x}{(1 + te^{i\theta})^2} dt \\ &= ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{t^x}{1 + te^{i\theta}} \right) dt \\ &= ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} h'(t) dt. \end{aligned}$$

En conclusion :

$$g \in C^1(]-\pi, \pi[, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \forall \theta \in ]-\pi, \pi[, \quad g'(\theta) = ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} h'(t) dt.$$

D'autre part, on a  $h(0) = 0$  et

$$h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^x}{te^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{t^{1-x}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$ .

Alors, pour tout  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , on a :

$$g'(\theta) = ie^{ix\theta} \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) - h(0) \right) = 0.$$

En particulier,

$g$  est constante sur  $]-\pi, \pi[$ .

4. Soit  $\theta \in ]0, \pi[$ . On a

$$g(\theta) \sin(x\theta) = \frac{1}{2i} g(\theta) (e^{ix\theta} - e^{-ix\theta}) = \frac{1}{2i} (g(\theta) e^{ix\theta} - g(\theta) e^{-ix\theta})$$

mais  $g$  est constante sur  $]-\pi, \pi[$  donc  $g(-\theta) = g(\theta)$  et donc

$$\forall \theta \in ]0, \pi[, \quad g(\theta) \sin(x\theta) = \frac{1}{2i} (g(-\theta) e^{ix\theta} - g(\theta) e^{-ix\theta}).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} (g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}) &= \frac{1}{2i} \left( \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{-i\theta}} dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} dt \right) \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} \frac{t^x(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{|1+te^{i\theta}|^2} dt \\ &= \sin(\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+2t\cos(\theta)+t^2} dt. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\forall \theta \in ]0, \pi[, \quad g(\theta) \sin(x\theta) = \sin(\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+2t\cos(\theta)+t^2} dt.$$

5. Pour tout  $\theta \in ]0, \pi[, \sin(\theta) > 0$  donc on peut effectuer le changement de variable  $t = u \sin(\theta) - \cos(\theta)$  ou, de manière équivalente  $u = \frac{t}{\sin(\theta)} + \cotan(\theta)$  qui induit une bijection croissante de classe  $C^1$  de  $[0, +\infty[$  vers  $[\cotan(\theta), +\infty[$ .

Avec les notations différentielles usuelles, on a  $dt = \sin(\theta) du$  et

$$1+t^2+2t\cos(\theta) = 1+(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^2+2(u\sin(\theta)-\cos(\theta))\cos(\theta) = \sin^2(\theta)(1+u^2).$$

En injectant dans l'intégrale, il vient donc :

$$\sin(\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+2t\cos(\theta)+t^2} dt = \int_{\cotan(\theta)}^{+\infty} \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2} du.$$

Ainsi, il suit de la question 4 que :

$$\forall \theta \in ]0, \pi[, \quad g(\theta) \sin(x\theta) = \int_{\cotan(\theta)}^{+\infty} \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2} du.$$

6. Pour tout  $\theta \in ]0, \pi[,$  on pose

$$f_\theta : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ u & \mapsto \mathbb{1}_{[\cotan(\theta), +\infty[}(u) \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2} \end{cases}.$$

On a  $\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \cotan(\theta) = -\infty$  donc, pour tout  $u \in \mathbb{R},$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} f_\theta(u) = \frac{1}{1+u^2}.$$

Par ailleurs, pour tout  $\theta \in ]0, \pi[$  et pour tout  $u \in \mathbb{R},$  on a :

$$|f_\theta(u)| \leq \left| \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2} \right| \leq \underbrace{\frac{1+|u|^x}{1+u^2}}_{=\varphi(u)}$$

et  $\varphi \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifie  $\varphi(u) \underset{u \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{|u|^{2-x}}$  et  $2-x > 1$  donc  $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$

D'après l'extension du théorème de convergence dominée aux familles de fonctions dépendant d'un paramètre continu, on a :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2},$$

et donc, d'après l'identité établie en 5 :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} g(\theta) \sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}.$$

7. Puisque  $g$  est constante sur  $]-\pi, \pi[$ , on a  $\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} g(\theta) = g(0)$  et  $g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ .  
 D'autre part,  $\theta \mapsto \sin(x\theta)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \sin(x\theta) = \sin(\pi x)$ .

Ainsi, il suit de la question 6 que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \sin(\pi x) \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

Mais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = [\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Alors, puisque  $x \in ]0, 1[$ ,  $\sin(\pi x)$  ne s'annule pas et on a bien :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

## Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

8. Par relation de Chasles pour les intégrales généralisées convergentes, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

mais en effectuant le changement de variable  $u = \frac{1}{t}$ , qui est  $C^1$  strictement décroissant de  $[1, +\infty[$  vers  $]0, 1]$ , on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = - \int_1^{+\infty} \frac{(1/t)^{1-x}}{\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^1 \frac{u^{1-x}}{u+u^2} du = \int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u} du.$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t} dt$$

et, par linéarité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \left( \frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t} \right) dt.$$

9. Sous réserve de pouvoir intervertir les signes somme et intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt &= \int_0^1 t^{x-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{x+k-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^1 t^{x+k-1} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[ \frac{t^{x+k}}{x+k} \right]_0^1 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}.
\end{aligned}$$

Justifions maintenant l'interversion. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $t \in [0, 1[$ , on pose

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{x+k-1} \quad \text{et} \quad R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{x+k-1}.$$

En utilisant l'expression classique du reste d'une série géométrique convergente, on a  $R_n(t) = \frac{(-1)^{n+1} t^{x+n}}{1+t}$  et donc

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{x+k-1} dt = \int_0^1 (S_n(t) + R_n(t)) dt = \int_0^1 S_n(t) dt + \int_0^1 R_n(t) dt = \int_0^1 S_n(t) dt + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{x+n}}{1+t} dt$$

mais, pour tout  $t \in [0, 1[$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} t^{x+n}}{1+t} \right| \leq \frac{1}{1+t}$$

donc, par convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{x+n}}{1+t} dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{x+n}}{1+t} dt = 0$$

Ainsi, on a bien :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{x+k-1} dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(t) dt \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{x+k-1} dt \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{x+k-1} dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{x+k-1} dt,
\end{aligned}$$

ce qui justifie l'interversion.

En conclusion :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}.$$

**10.** On part de l'égalité établie en **8** :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \left( \frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t} \right) dt.$$

On a établi en **9** que :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

Pour le membre de droite, on observe que, pour tout  $t \in [0, 1[$ , on a :

$$\frac{t^{-x}}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{n-x}$$

et un raisonnement analogue à celui mené à la question **8** montre que

$$\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{n-x} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-x+1}.$$

On a donc bien :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-x+1}.$$

**11.** On injecte le résultat précédent dans l'identité établie à la question **7** :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin(\pi x)} &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)-x} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-x} \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{n^2 - x^2}. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2}.$$

**12.** Soit  $y \in ]0, \pi[$  et  $x = \frac{y}{\pi} \in ]0, 1[$  de sorte que  $y = \pi x$ . En multipliant l'identité trouvée à la question **11** par  $x$ , on a :

$$\frac{y}{\sin(y)} = \frac{\pi x}{\sin(\pi x)} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x^2}{n^2 - x^2}.$$

En multipliant par  $\sin(y)$  et en divisant par  $y$  et en remplaçant  $x$  par  $\frac{y}{\pi}$ , on obtient :

$$1 = \frac{\sin(y)}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{n^2 \pi^2 - y^2}.$$

donc

$$1 - \frac{\sin(y)}{y} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{y^2 - n^2 \pi^2}.$$

### Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13.  $t \mapsto \frac{1 - \cos^{2p+1}(t)}{t^2} \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ .

En  $+\infty$  :

$$\frac{1 - \cos^{2p+1}(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc, par comparaison,  $t \mapsto \frac{1 - \cos^{2p+1}(t)}{t^2} \in \mathcal{L}^1([1, +\infty[, \mathbb{R})$ .

En 0 : Un développement limité à l'ordre 2 du cosinus en 0 et un binôme de Newton permettent d'affirmer que

$$\frac{1 - \cos^{2p+1}(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{2p+1}{2}$$

donc l'intégrale est faussement impropre en 0.

En conclusion :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^{2p+1}(t)}{t^2} dt \text{ converge.}$$

Une intégration par parties généralisée, justifiée par la convergence de tous les termes impliqués montre que :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} \times (1 - \cos^{2p+1}(t)) dt &= \left[ -\frac{1 - \cos^{2p+1}(t)}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \times (2p+1) \sin(t) \cos^{2p}(t) dt \\ &= (2p+1) \int_0^{+\infty} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^{2p+1}(t)}{t^2} dt = (2p+1) \int_0^{+\infty} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

14. On commence par effectuer le changement de variable  $u = t - n\pi$  et avec la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2+(n-1)\pi}^{\pi/2+n\pi} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2p}(u) \frac{(-1)^n \sin(u)}{u+n\pi} du \\ &= \int_{-\pi/2}^0 \cos^{2p}(u) \frac{(-1)^n \sin(u)}{u+n\pi} du + \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(u) \frac{(-1)^n \sin(u)}{u+n\pi} du. \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable  $v = -u$  dans la première intégrale puis, par linéarité de l'intégrale, factorisation et mise sous le même dénominateur, il vient :

$$\int_{\pi/2+(n-1)\pi}^{\pi/2+n\pi} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} dt.$$

15. D'après la relation de Chasles et la question précédente, sous réserve de pouvoir intervertir les signes somme et intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{+\infty} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\pi/2+(n-1)\pi}^{\pi/2+n\pi} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right) dt$$

L'interversion est justifiée par la convergence normale de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2}$  sur le segment  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

16. D'après la relation de Chasles et les questions 12 et 15, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} dt &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} dt + \int_{\pi/2}^{+\infty} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} dt + \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} dt + \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) \left( 1 - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) dt. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\int_0^{+\infty} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) dt.$$

17. Avec la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} \cos^{2p}(t) &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{ikt} e^{i(k-2p)t} \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)t} \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \left( \binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)t} + \sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)t} \right) \end{aligned}$$

Mais, en effectuant le changement d'indice  $\ell = 2p - k$  dans la dernière somme, on a :

$$\sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)t} = \sum_{\ell=0}^{p-1} \binom{2p}{2p-\ell} e^{2i(p-\ell)t} = \sum_{\ell=0}^{p-1} \binom{2p}{\ell} e^{2i(p-\ell)t}$$

donc, en réinjectant

$$\cos^{2p}(t) = \frac{1}{2^{2p}} \left( \binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \underbrace{\left[ e^{2i(k-p)t} + e^{2i(p-k)t} \right]}_{=2 \cos((p-k)t)} \right).$$

On a donc bien :

$$\cos^{2p}(t) = \frac{1}{2^{2p}} \left( \binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2i(p-k)t) \right).$$

18. En combinant les questions 13, 16 et 17, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^{2p+1}(t)}{t^2} dt = (2p+1) \int_0^{+\infty} \cos^{2p}(t) \frac{\sin(t)}{t} dt$$



$$\begin{aligned}
&= (2p+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) dt \\
&= (2p+1) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2^{2p}} \left( \binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2i(p-k)t) \right) dt \\
&= \frac{2p+1}{2^{2p}} \frac{\pi}{2} \binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos(2i(p-k)t) dt}_{=0} \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{2p+1}{2^{2p}} \frac{(2p)!}{(p!)^2}
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^{2p+1}(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}.$$

## Partie IV : Calcul de $\mathbf{E}[|S_n|]$

19. Les variables aléatoires  $X_k$  et  $S_n$  étant finies, elles admettent des moments finis à tout ordre. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\mathbf{E}[X_k] = 0$  et  $\mathbf{V}(X_k) = \mathbf{E}[X_k^2] = \mathbf{E}[1] = 1$ . Ainsi, les  $X_k$  sont centrées et réduites.

Par linéarité de l'espérance, on a donc :

$$\mathbf{E}[S_n] = \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[X_k] = 0$$

et, par indépendance des  $X_k$ , on a :

$$\mathbf{V}(S_n) = \mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) = n.$$

Ainsi :

$$\mathbf{E}[S_n] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(S_n) = n.$$

20. Si  $T$  et  $-T$  suivent la même loi, alors  $\sin(T)$  et  $\sin(-T) = -\sin(T)$  suivent la même loi donc  $\mathbf{E}[\sin(T)] = \mathbf{E}[-\sin(T)] = -\mathbf{E}[\sin(T)]$  et donc  $\mathbf{E}[\sin(T)] = 0$ .

D'autre part,

$$\cos(S+T) = \cos(S)\cos(T) - \sin(S)\sin(T)$$

mais  $S$  et  $T$  sont indépendantes donc, d'après le lemme des coalitions,  $\cos(S)$  est indépendante de  $\cos(T)$  et  $\sin(S)$  est indépendante de  $\sin(T)$ . Par multiplicativité de l'espérance pour des variables aléatoires indépendantes, on a donc :

$$\mathbf{E}[\cos(S+T)] = \mathbf{E}[\cos(S)] \mathbf{E}[\cos(T)] - \mathbf{E}[\sin(S)] \underbrace{\mathbf{E}[\sin(T)]}_{=0}$$

donc :

$$\mathbf{E}[\cos(S+T)] = \mathbf{E}[\cos(S)] \mathbf{E}[\cos(T)].$$

21. La propriété précédente se généralise à  $n$  variables aléatoires indépendantes par une récurrence immédiate. D'autre part, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_k$  et  $X_{-k}$  suivant la même loi. Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\mathbf{E}[\cos(tS_n)] = \mathbf{E}\left[\cos\left(\sum_{k=1}^n tX_k\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E} [\cos (tX_1)]^n \\
&= \left[ \frac{1}{2} \cos(-t) + \frac{1}{2} \cos(t) \right]^n \\
&= \cos^n(t).
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E} [\cos(tS_n)] = \cos^n(t).$$

22. On raisonne par disjonction de cas sur le signe de  $a$  :

— Si  $a > 0$ ,  $\text{signe}(a) = 1$  et, puisque  $|b| \leq |a|$ , on a  $a + b > 0$  donc

$$|a + b| = a + b = |a| + \text{signe}(a)b.$$

— Si  $a < 0$ ,  $\text{signe}(a) = -1$  et, puisque  $|b| \leq |a|$ , on a  $a - b < 0$  donc

$$|a + b| = -a - b = |a| + \text{signe}(a)b.$$

On a donc bien

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad (|b| \leq |a| \Rightarrow |a + b| = |a| + \text{signe}(a)b).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On commence par observer que  $S_n$  prend ses valeurs dans  $[-n, n]$  et  $S_n$  ne peut prendre la valeur 0 que si  $n$  est pair (il faut autant de  $X_k$  égales à  $-1$  que de  $X_k$  égales à  $1$  pour que la somme soit nulle). Ainsi,

$$|S_{2n-1}| \geq 1 = |X_{2n}|$$

donc, d'après ce qui précède :

$$|S_{2n}| = |S_{2n-1} + X_{2n}| = |S_{2n-1}| + \text{signe}(S_{2n-1})X_{2n}$$

mais, d'après le lemme des coalitions,  $X_{2n}$  et  $\text{signe}(S_{2n-1})$  sont indépendantes donc :

$$\mathbf{E} [|S_{2n}|] = \mathbf{E} [|S_{2n-1}|] + \mathbf{E} [\text{signe}(S_{2n-1})] \underbrace{\mathbf{E} [X_{2n}]}_{=0}$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E} [|S_{2n}|] = \mathbf{E} [|S_{2n-1}|].$$

23. Posons  $I_s = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt$ .

— Si  $s = 0$ ,  $I_0 = 0$  donc la propriété est vérifiée.

— Si  $s > 0$ , le changement de variable  $u = st$  est  $C^1$  strictement croissant de  $]0, +\infty[$  vers  $]0, +\infty[$  et on obtient :

$$I_s = \int_0^{+\infty} s \frac{1 - \cos(st)}{(st)^2} s dt = s \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du$$

On reconnaît l'intégrale calculée en 18 dans le cas où  $p = 0$ . On a donc  $I_s = s \frac{\pi}{2}$ .

— Si  $s < 0$ , le changement de variable  $u = st$  est  $C^1$  strictement croissant de  $]0, +\infty[$  vers  $]0, +\infty[$  et on obtient de même  $I_s = -s \frac{\pi}{2}$ .

En conclusion :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt = |s| \frac{\pi}{2}.$$

24. En appliquant l'identité précédente à  $s = S_n(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ , on a :

$$|S_n| = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt.$$

En passant à l'espérance, sous réserve que l'on puisse intervertir espérance et intégrale, il suit de 21 que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[|S_n|] &= \frac{2}{\pi} \mathbf{E} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathbf{E}[\cos(tS_n)]}{t^2} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Justifions maintenant l'interversion. Posons  $\varphi : s \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt$ . On a

$$\mathbf{E} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right] = \mathbf{E}[\varphi(S_n)]$$

donc, d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right] &= \mathbf{E}[\varphi(S_n)] \\ &= \sum_{s \in S_n(\Omega)} \varphi(s) \mathbf{P}(S_n = s) \\ &= \sum_{s \in S_n(\Omega)} \mathbf{P}(S_n = s) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \sum_{s \in S_n(\Omega)} \mathbf{P}(S_n = s) \frac{1 - \cos(st)}{t^2} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbf{E} \left[ \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} \right] dt \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\mathbf{E}[|S_n|] = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2} dt.$$

25. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il suit de 22, 24 et 18 que

$$\mathbf{E}[|S_{2n}|] = \mathbf{E}[|S_{2n-1}|] = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^{2n-1}(t)}{t^2} dt = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}.$$

On a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}[|S_{2n}|] = \mathbf{E}[|S_{2n-1}|] = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}.$$

\*\*\* Fin du sujet \*\*\*