Mines-Ponts - MP/MPI 2024 - Mathématiques 1

Durée : 3h

Le but ce de sujet est de calculer l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et d'utiliser ce calcul pour évaluer une espérance.

Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0,1[$ fixé.

1. Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$, la fonction f définie par

$$f : \left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} \end{array}\right.$$

est définie et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$r : \left\{\begin{array}{ccc}]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}\,\mathrm{d}t. \end{array}\right.$$

2. Montrer que la fonction r est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$ et que :

$$\forall \theta \in]-\pi,\pi[\,,\quad r'(\theta) = -ie^{i\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\,\mathrm{d}t.$$

Indication : soit $\beta \in]0,\pi[$, montrer que pour tout $\theta \in]-\beta,\beta[$, $\left|1+te^{i\theta}\right|^2 \geq \left|1+te^{i\beta}\right|^2 = (t+\cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2$.

Soit g la fonction définie par

$$g : \left\{\begin{array}{ccc}]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{ix\theta}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}\,\mathrm{d}t. \end{array}\right.$$

3. Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$ et que pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$,

$$g'(\theta) = ie^{ix\theta}\int_0^{+\infty} h'(t)\,\mathrm{d}t,$$

où h est la fonction définie par

$$h : \left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^x}{1+te^{i\theta}} \end{array}\right. .$$

Calculer $h(0)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)$.

En déduire que la fonction g est constante sur $]-\pi,\pi[$.

4. Montrer que pour tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2i}\left(g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}\right) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+2t\cos(\theta)+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

5. En déduire que :

$$\forall \theta \in]0,\pi[\,,\quad g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

où $\mathrm{cotan}(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

6. Montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{\theta \to \pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

7. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0,1[$ fixé.

8. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\mathrm{d}t.$$

9. Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}.$$

10. Établir l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-x+1}.$$

11. En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2}.$$

12. En déduire enfin que :

$$\forall y \in\,]0,\pi[\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{y^2 - n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}.$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{\pi/2+(n-1)\pi}^{\pi/2+n\pi} \cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t.$$

15. En déduire que :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t$$

16. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas $p = 0$, cette intégrale est communément appelée «intégrale de Dirichlet».

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

17. Montrer que :

$$\cos^{2p}(t) = \frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos(2i(p-k)t)\right).$$

Indication : On pourra développer $\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2p}$.

18. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}.$$

Partie IV : Calcul de $\mathbf{E}\left[|S_n|\right]$

Toutes les variables aléatoire sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par :

$$\mathbf{P}(X_1 = -1) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

19. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}[S_n]$ et $\mathbf{V}(S_n)$.

Soient S et T deux variables aléatoires indépendantes prenant toutes deux un nombre fini de valeurs réelles. On suppose que T et $-T$ suivent la même loi.

20. Montrer que :

$$\mathbf{E}[\cos(S+T)] = \mathbf{E}[\cos(S)]\,\mathbf{E}[\cos(T)].$$

21. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{E}[\cos(tS_n)] = (\cos(t))^n.$$

22. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ et $|b| \leq |a|$. Montrer que

$$|a+b| = |a| + \operatorname{signe}(a)b$$

où $\operatorname{signe}(x) = x/|x|$ pour x réel non nul. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}[|S_{2n}|] = \mathbf{E}[|S_{2n-1}|].$$

23. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t = |s|\,\frac{\pi}{2}.$$

24. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{E}[|S_n|] = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

25. Conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}[|S_{2n}|] = \mathbf{E}[|S_{2n-1}|] = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}.$$

*** Fin du sujet ***

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.