Mines-Ponts - MP/MPI 2024 - Mathématiques 2

Éléments de correction

Mise en garde: Un corrigé inachevé

Je mets en garde le lecteur en quête de réponses aux questions 20 et au-delà que, pour l'heure, ce corrigé ne les traite pas.

Partie I : Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

1. Notons P_ρ la matrice de permutation associée à ρ, c'est-à-dire la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme f_ρ de $\mathbb{R}^n$ défini sur la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par $f_\rho(e_i) = e_{\rho(i)}$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. C'est une matrice inversible puisque $P_\rho P_{\rho^{-1}} = I_n$.
Alors pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a

$$P_\rho^{-1} M P_\rho = \left(m_{\rho(i),\rho(j)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

En particulier :

$$\boxed{M \text{ et } \left(m_{\rho(i),\rho(j)}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \text{ sont semblables.}}$$

En particulier, si σ et σ' sont deux indexations de S, alors $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont conjuguées via la matrice de permutation P_ρ, où $\rho = \sigma' \circ \sigma^{-1}$ est une permutation de $[\![1, n]\!]$. En d'autres termes :

$$\boxed{M_{G,\sigma} \text{ et } M_{G,\sigma'} \text{ sont semblables.}}$$

2. Une matrice d'adjacence d'une graphe non vide est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable.

3. Soit σ une indexation des sommets de G. Puisque G ne contient pas de boucles, tous les coefficients diagonaux de $M_{G,\sigma}$ sont nuls. En particulier $\operatorname{tr}(M_{G,\sigma}) = 0$.
Supposons que $\operatorname{rg}(M_{G,\sigma}) = 1$. Puisque $M_{G,\sigma}$ est diagonalisable de rang 1, elle est semblable à une matrice $D = \operatorname{diag}(\lambda, 0, \ldots, 0)$ avec $\lambda \neq 0$. Mais alors

$$0 = \operatorname{tr}(M_{G,\sigma}) = \operatorname{tr}(D) = \lambda \neq 0,$$

une contradiction.
Ainsi :

$$\boxed{\text{Une matrice d'adjacence n'est jamais de rang 1.}}$$

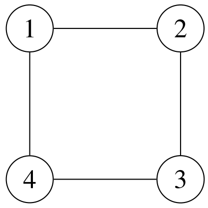
4. Soit G un graphe ayant n sommets, avec $n \geq 2$, dont les sommets non isolés forment un graphe de type étoile. On choisit une indexation σ de sorte que $\sigma(1)$ soit le centre de l'étoile, $\sigma(2), \ldots, \sigma(d)$ soient les sommets des branches de l'étoile et $\sigma(d+1), \ldots, \sigma(n)$ soient les sommets isolés (on peut avoir $d = n$ si le graphe n'a pas de sommets isolés). Alors

$$M_{G,\sigma} = \left(\begin{array}{cccc|ccc}
0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)$$

donc

$$\boxed{\operatorname{rg}(M_{G,\sigma}) = 2.}$$

Considérons le graphe :



Sa matrice d'adjacence est :

$$M_{G,\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2, alors qu'elle n'est pas du type étoile avec éventuellement des sommets isolés.

5. Si G et G' sont vides, $\chi_G = \chi_{G'} = 1$. Sinon, on note σ une indexation de G, σ' une indexation de G'. Alors $\rho = \sigma' \circ \sigma^{-1}$ est une permutation de $[\![1, n]\!]$ et $M_{G,\sigma}$ et $M_{G',\sigma'}$ sont conjuguées via la matrice de permutation P_ρ ; elles sont donc semblables et ainsi :

$$\boxed{\chi_G = \chi_{G'}.}$$

6. Soit σ une indexation des sommets de G. Puisque χ_G est le polynôme caractéristique de $M_{G,\sigma}$, on sait que $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(M_{G,\sigma})$ mais $\operatorname{tr}(M_{G,\sigma}) = 0$ car G ne contient aucune boucle. Ainsi :

$$\boxed{a_{n-1} = 0.}$$

Déterminons a_{n-2}. On pose $M_{G,\sigma} = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On sait que

$$\chi_G(X) = \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\rho) \prod_{k=1}^{n} [XI_n - M]_{k,\rho(k)} = \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\rho) \prod_{k=1}^{n} \delta_{k,\rho(k)} XI_n - m_{k,\rho(k)}.$$

Ainsi, le monôme correspondant à une permutation $\rho \in \mathcal{S}_n$ est de degré $n-2$ si, et seulement si, la permutation ρ possède exactement $n-2$ points fixes. Or, une permutation ayant $n-2$ points fixes est une transposition. Les transpositions sont de signature égale à -1 donc le monôme de degré $n-2$ dans χ_G est :

$$-\sum_{\substack{\{i,j\} \subset [\![1,n]\!] \\ i \neq j}} m_{i,j} m_{j,i} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} (X - m_{k,k})$$

de sorte que le coefficient de X^{n-2} dans χ_G est :

$$a_{n-2} = -\sum_{\substack{\{i,j\} \subset [\![1,n]\!] \\ i \neq j}} m_{i,j} m_{j,i}.$$

Mais $M_{G,\sigma}$ est symétrique avec tous ses coefficients égaux à 0 ou à 1 donc $m_{i,j} m_{j,i} = m_{i,j}^2 = m_{i,j}$ de sorte que :

$$a_{n-2} = -\sum_{\substack{\{i,j\} \subset [\![1,n]\!] \\ i \neq j}} m_{i,j} = -\sum_{\{i,j\} \in A} \underbrace{m_{i,j}}_{=1} - \sum_{\{i,j\} \notin A} \underbrace{m_{i,j}}_{=0} = -|A|.$$

En conclusion :

$$\boxed{a_{n-2} = -|A|.}$$

7. Si $G = (S, A)$ est un graphe à n sommet dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches, on a $a_{n-2} = -d$ et, d'après **4**, $\mathrm{rg}(M_{G,\sigma}) = 2$ pour toute énumération σ. Puisque $M_{G,\sigma}$ est diagonalisable, la multiplicité algébrique de 0 est égale à $n-2$ et donc $\chi_G = X^{n-2}(X^2 + a_{n-1}X + a_{n-2})$. Il suit alors de **6** que :

$$\boxed{\chi_G = X^n - dX^{n-2}.}$$

Les valeurs propres de $M_{G,\sigma}$ étant égales aux racines de χ_G, on a :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M_{G,\sigma}) = \left\{0, -\sqrt{d}, \sqrt{d}\right\}.}$$

Choisissons une énumération σ telle que :

$$M_{G,\sigma} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

Posons

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{d} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors, par calcul matriciel par blocs, on a :

$$M_{G,\sigma}V_1 = \begin{pmatrix} d \\ \sqrt{d} \\ \vdots \\ \sqrt{d} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{d}V_1 \quad \text{et} \quad M_{G,\sigma}V_2 = \begin{pmatrix} d \\ -\sqrt{d} \\ \vdots \\ -\sqrt{d} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{d}V_2$$

donc $V_1 \in E_{\sqrt{d}}(M_{G,\sigma})$ et $V_2 \in E_{-\sqrt{d}}(M_{G,\sigma})$. Puisque $M_{G,\sigma}$ est diagonalisable de rang 2 et que $d \geq 1$, on a

$$\boxed{E_{\sqrt{d}}(M_{G,\sigma}) = \mathrm{Vect}(V_1) \quad \text{et} \quad E_{-\sqrt{d}}(M_{G,\sigma}) = \mathrm{Vect}(V_2).}$$

8. En notant $n_1 = |S_1|$, $n_2 = |S_2|$ et en choisissant une indexation σ telle que, $\sigma(\llbracket 1, n_1 \rrbracket) = S_1$, $\sigma(n_1) = s_1$, $\sigma(\llbracket n_1+1, n_2 \rrbracket) = S_2$, $\sigma(n_1+1) = s_2$, on a :

$$M_{G,\sigma} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & M_{G_1,\sigma_1} & & & \vdots & & & \vdots \\ & & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & M_{G_2,\sigma_2} & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & & \end{array}\right)$$

donc un développement par rapport à la n_1-ième ligne donne :

$$\boxed{\chi_G = \chi_{G_1}\chi_{G_2} - \chi_{G_1\setminus s_1}\chi_{G_2\setminus s_2}.}$$

9. Notons G la double étoile à d_1+d_2+2, G_1 le sous-graphe formé par l'étoile à d_1 branche, d_2 l'étoile à d_2 branches et notons respectivement s_1 et s_2 les centres de ces étoilées.
Alors $G_1 \setminus s_1$ est un graphe totalement disconnecté à d_1 sommets de sorte que toute matrice d'adjacence de $G_1 \setminus s_1$ est égale à 0_{d_1} et donc $\chi_{G_1\setminus s_1} = X^{d_1}$. De même, $\chi_{G_2\setminus s_2} = X^{d_2}$.
D'autre part, il suit de **7** que $\chi_{G_1} = X^{d_1+1} - d_1X^{d_1-1}$ et $\chi_{G_2} = X^{d_2+1} - d_2X^{d_2-1}$ donc, d'après **8** :

$$\begin{aligned}\chi_G &= \left(X^{d_1+1} - d_1X^{d_1-1}\right)\left(X^{d_2+1} - d_2X^{d_2-1}\right) - X^{d_1-1}X^{d_2-1} \\ &= X^{d_1+d_2+2} - (d_1+d_2+1)X^{d_1+d_2} + d_1d_2X^{d_1+d_2-2}.\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\chi_G = X^{d_1+d_2+2} - (d_1+d_2+1)X^{d_1+d_2} + d_1d_2X^{d_1+d_2-2}.}$$

Soit σ une indexation des sommets de G. Puisque $M_{G,\sigma}$ est diagonalisable d'après **2**, on sait que la multiplicité algébrique de chaque valeur propre est égale à sa multiplicité géométrique. En particulier, puisque 0 est racine d'ordre d_1+d_2-2 de χ_G, on peut affirmer que :

$$\dim\ker(M_{G,\sigma}) = d_1+d_2-2$$

Alors, d'après le théorème du rang :

$$\operatorname{rg}(M_{G,\sigma}) = (d_1+d_2+2) - (d_1+d_2-2) = 4.$$

On peut donc affirmer :

$$\boxed{\text{Toute matrice d'adjacence d'une telle double étoile est de rang 4.}}$$

10. On a

$$\{G\} = \bigcap_{\{i,j\}\in A}\left(X_{\{i,j\}} = 1\right)\bigcap_{\{i,j\}\notin A}\left(X_{\{i,j\}} = 0\right)$$

donc, par indépendance des $X_{\{i,j\}}$, on a :

$$\mathbf{P}(\{G\}) = \prod_{\{i,j\}\in A}\mathbf{P}\left(X_{\{i,j\}} = 1\right)\prod_{\{i,j\}\notin A}\mathbf{P}\left(X_{\{i,j\}} = 0\right)$$

mais chaque $X_{\{i,j\}}$ suit une loi $\mathcal{B}(p_n)$ et il y a $\binom{n}{2}$ paires $\{i,j\}$ possibles d'éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$ donc :

$$\mathbf{P}(\{G\}) = \prod_{\{i,j\}\in A} p_n \prod_{\{i,j\}\notin A} q_n. = p_n^{|A|}q_n^{\binom{n}{2}-|A|}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}(\{G\}) = p_n^{|A|} q_n^{\binom{n}{2}-|A|}.}$$

Si on note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des paires $\{i, j\}$ formées d'éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\Omega_n = \bigsqcup_{A \in \mathcal{A}_n} \left[\bigcap_{\{i,j\} \in A} \left(X_{\{i,j\}} = 1 \right) \bigcap_{\{i,j\} \notin A} \left(X_{\{i,j\}} = 0 \right) \right]$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\Omega_n) &= \sum_{A \in \mathcal{A}_n} \mathbf{P}\left(\bigcap_{\{i,j\} \in A} \left(X_{\{i,j\}} = 1 \right) \bigcap_{\{i,j\} \notin A} \left(X_{\{i,j\}} = 0 \right) \right) \\
&= \sum_{A \in \mathcal{A}_n} p_n^{|A|} q_n^{\binom{n}{2}-|A|} \\
&= \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} \left[\sum_{\substack{A \in \mathcal{A}_n \\ |A| = k}} p_n^{|A|} q_n^{\binom{n}{2}-|A|} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} \left[\sum_{\substack{A \in \mathcal{A}_n \\ |A| = k}} p_n^{k} q_n^{\binom{n}{2}-k} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{k} p_n^{k} q_n^{\binom{n}{2}-k} \\
&= (p_n + q_n)^{\binom{n}{2}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\mathbf{P}(\Omega_n) = 1.}$$

Partie II - Une première fonction de seuil

Section A - Deux inégalités

11. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq \mathbf{P}(X = k) \leq k\mathbf{P}(X = k)$ donc, dans $[0, +\infty]$, on a :

$$\mathbf{P}(X > 0) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(X = k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{E}[X].$$

On a donc bien :

$$\boxed{\mathbf{P}(X > 0) \leq \mathbf{E}[X].}$$

En outre, puisque X est supposée avoir une espérance finie, ces deux nombres sont finis.

12. On a l'inclusion $(X = 0) \subset (|X - \mathbf{E}[X]| \geq \mathbf{E}[X])$ donc

$$\mathbf{P}(X = 0) \leq \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}[X]| \geq \mathbf{E}[X])$$

mais X est supposée avoir une variance finie donc, d'après l'inégalité de Tchebychev, on a :

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}[X]| \geq \mathbf{E}[X]) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{E}[X]^2}$$

donc :

$$\boxed{\mathbf{P}(X=0) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{E}[X]^2}.}$$

Section B - Une fonction de seuil

13. On a $A_n(\Omega_n) \subset \left[\!\left[0, \binom{n}{2}\right]\!\right]$ et, si on note $\mathcal{A}_n$, l'ensemble des paires $\{i, j\}$ formées d'éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$, on a, pour tout $k \in \left[\!\left[0, \binom{n}{2}\right]\!\right]$:

$$(A_n = k) = \bigsqcup_{\substack{A \in \mathcal{A}_n \\ |A| = k}} \{([\![1, n]\!], A)\}$$

donc, d'après **10**, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_n = k) &= \sum_{\substack{A \in \mathcal{A}_n \\ |A| = k}} \mathbf{P}(\{([\![1, n]\!], A)\}) \\
&= \sum_{\substack{A \in \mathcal{A}_n \\ |A| = k}} p_n^k q_n^{\binom{n}{2} - k} \\
&= \binom{\binom{n}{2}}{k} p_n^k q_n^{\binom{n}{2} - k}
\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{A_n \sim \mathcal{B}\left(\binom{n}{2}, p_n\right).}$$

14. On a $\mathbf{P}(A_n > 0) = 1 - \mathbf{P}(A_n = 0)$ mais

$$\mathbf{P}(A_n = 0) = q_n^{\binom{n}{2}} = (1 - p_n)^{\binom{n}{2}} = \exp\left(\binom{n}{2} \ln(1 - p_n)\right)$$

or $p_n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et

$$\binom{n}{2} \ln(1 - p_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{n(n-1)}{2} p_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{n^2 p_n}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Par continuité de l'exponentielle, $\mathbf{P}(A_n = 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 0.}$$

15. Si $\frac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{=} o(p_n)$, alors, par positivité, $\frac{1}{n^2 p_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0^+$ et donc $n^2 p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Alors, comme précédemment,

$$\mathbf{P}(A_n = 0) = \exp\left(\binom{n}{2} \ln(1 - p_n)\right)$$

mais, par concavité du logarithme, on a $\ln(1 - p_n) \leq -p_n$ donc, par croissance de l'exponentielle,

$$\exp\left(\binom{n}{2} \ln(1 - p_n)\right) \leq \exp\left(-\binom{n}{2} p_n\right)$$

mais

$$-\binom{n}{2}p_n = -\frac{n(n-1)}{2}p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}n^2 p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(\binom{n}{2}\ln(1-p_n)\right) = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 1.}$$

16. Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété définie pour $G \in \Omega_n$ par : G possède au moins une arête. Alors les questions **14** et **15** montrent que $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 2}$ est une fonction de seuil pour la propriété $\mathcal{P}_n$.

Remarque

Concrètement, cela signifie que pour un graphe aléatoire G avec un très grand nombre n de sommets où chaque arête a une probabilité p_n d'exister dans le graphe, il est presque certain que G ne possèdera aucune arête si p_n est négligeable devant $\frac{1}{n^2}$ et il est presque certain que G possède au moins une arête si p_n est prépondérant devant $\frac{1}{n^2}$.

Partie III - Fonction de seuil de la copie d'un graphe

17. X_H est une variable aléatoire de Bernoulli donc

$$\mathbf{E}[X_H] = \mathbf{P}(X_H = 1) = \mathbf{P}(H \subset G)$$

mais comme $S_H \subset [\![1,n]\!] = S$, H est inclus dans G si, et seulement si, toute arête de H est une arête de G, c'est-à-dire :

$$(H \subset G) = \bigcap_{a\in A_H} (a \in A)$$

mais pour tout couple $\{i,j\} \in [\![1,n]\!]$ tel que $i \neq j$, $\mathbf{P}(\{i,j\} \in A) = p_n$ donc, par indépendance :

$$\mathbf{P}(H \subset G) = \prod_{a\in A_H} p_n = p_n^{a_H}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}[X_H] = p_n^{a_H}.}$$

18. Si on note $C_{S_0'}$ l'ensemble des graphes $H = (S_H, A_H)$ qui sont des copies de G_0 tels que $A_H = S_0'$, alors on a la partition :

$$C_0 = \bigsqcup_{\substack{S_0'\subset[\![1,n]\!]\\ |S_0'|=s_0}} C_{S_0'}$$

donc

$$|C_0| = \sum_{\substack{S_0'\subset[\![1,n]\!]\\ |S_0'|=s_0}} c_0 = \binom{n}{s_0}c_0.$$

On a donc :

$$\boxed{|C_0| = \binom{n}{s_0}c_0.}$$

D'autre part, on a $c_0 \leq s_0!$ car il ne peut pas y avoir plus de copies de G_0 ayant pour sommets S'_0 que de permutations des sommets de S'_0. Alors

$$|C_0| \leq \frac{n!}{(n-s_0)!} = n \times \cdots (n-(s_0-1)) \leq n^{s_0}.$$

On a donc :

$$\boxed{|C_0| \leq n^{s_0}.}$$

19. On a

$$X_n^0 = \sum_{H \in C_0} X_H$$

donc

$$\mathbf{E}\left[X_n^0\right] = \sum_{H \in C_0} \mathbf{E}\left[X_H\right]$$

mais on a déjà observé en **17** que $X_H \sim \mathcal{B}(\mathbf{P}(H \subset G))$ donc :

$$\mathbf{E}\left[X_n^0\right] = \sum_{H \in C_0} \mathbf{P}(H \subset G).$$

Toujours de **17**, et avec la majoration obtenue en **18**, on a :

$$\mathbf{E}\left[X_n^0\right] = \sum_{H \in C_0} \mathbf{E}\left[X_H\right] = \sum_{H \in C_0} p_n^{a_0} = |C_0|\, p_n^{a_0} \leq n^{s_0} p_n^{a_0}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\mathbf{E}\left[X_n^0\right] = \sum_{H \in C_0} \mathbf{P}(H \subset G) \leq n^{s_0} p_n^{a_0}.}$$

20. Puisque X_n^0 est à valeurs entières, il suit de **11** que

$$0 \leq \mathbf{P}\left(X_n^0 > 0\right) \leq \mathbf{E}\left[X_n^0\right]$$

donc, par encadrement, il suffit de montrer que $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{E}\left[X_n^0\right] = 0$.
Assez peu inspiré par l'indication et par les questions qui suivent, je m'arrête là pour cette correction. A suivre ?

*** Fin (provisoire ?) du corrigé ***