Éléments de correction

Notations Dans tout ce sujet, si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice, on note

$$\|M\|_\infty = \sup_{(i,j) \in [1;n] \times [1;p]} |m_{i,j}|.$$

Partie I : le cas des matrices d'ordre 2

1. Pour tout $n \geq 2$, si $A = \lambda I_n$ est une matrice scalaire, avec $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour toute matrice inversible P , on a :

$$P^{-1}AP = P^{-1}\lambda I_n P = \lambda P^{-1}P = \lambda I_n = A$$

donc

$$\mathcal{S}(A) = \{A\}.$$

2. (a) Soit $k \in \mathbb{K}$. On a $\det(E_k) = \det(F_k) = 1$ donc E_k et F_k sont inversibles et

$$E_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a

$$E_k A E_k^{-1} = \begin{pmatrix} a + ck & -ck^2 + (d - a)k + b \\ c & -ck + d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_k A F_k^{-1} = \begin{pmatrix} a - bk & b \\ -bk^2 + (a - d)k + c & bk + d \end{pmatrix}.$$

(c) Pour tout $k \in \mathbb{K}$, on note $M_k = E_k A E_k^{-1}$ et $N_k = F_k A F_k^{-1}$.

— Supposons $c \neq 0$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|M_n\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} cn^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

mais $M_n \in \mathcal{S}(A)$ donc $\mathcal{S}(A)$ est non bornée.

— Supposons $b \neq 0$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|N_n\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} bn^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

mais $N_n \in \mathcal{S}(A)$ donc $\mathcal{S}(A)$ est non bornée.

— Supposons $b = c = 0$. Si $d \neq a$, alors

$$\|M_n\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |d - a|n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et donc $\mathcal{S}(A)$ est non bornée.

Ainsi, si $\mathcal{S}(A)$ est bornée, alors $b = c = 0$ et $a = d$, de sorte que A est nécessairement une matrice scalaire. Réciproquement, si A est une matrice scalaire, il suit de la question 1 que $\mathcal{S}(A)$ est bornée.

En conclusion :

$\mathcal{S}(A)$ est bornée si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

3. (a) Soit $i \in \{1, 2\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, M_k est semblable à A donc M_k et A ont le même polynôme caractéristique de sorte que

$$\det(M_k - \lambda_i I_2) = \chi_{M_k}(\lambda_i) = \chi_A(\lambda_i) = 0$$

Par continuité du déterminant, on a donc :

$$\det(B - \lambda_i I_2) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \det(M_k - \lambda_i I_2) = 0.$$

- (b) Soit $i \in \{1, 2\}$. D'après la question précédente, λ_i est une valeur propre de B . Puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, B est une matrice de taille 2 qui admet deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable et semblable à la matrice $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Or A est semblable à cette matrice par hypothèse. Par transitivité de la relation de similitude, $B \in \mathcal{S}(A)$.

Par caractérisation séquentielle des fermés, on a donc montré :

$$\mathcal{S}(A) \text{ est fermé dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).$$

4. (a) Par hypothèse, χ_A admet une racine $\lambda \in \mathbb{K}$ mais χ_A est de degré 2 donc χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ de sorte que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Puisque $\text{Sp}(A) = \{\lambda\}$, A est semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$.

Enfin, $\alpha \neq 0$ car sinon A est semblable à la matrice λI_2 et on a montré à la question 1 que cela implique que A est une matrice scalaire, une contradiction.

Ainsi A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Il reste à observer que si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}$, alors

$$P^{-1}TP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

de sorte que toutes les matrices de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ sont semblables.

En conclusion :

$$A \text{ est semblable à toute matrice de la forme } T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{K}^*.$$

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1/n \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et la question 4a montre que $T_n \in \mathcal{S}(A)$. Par ailleurs

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2 \notin \mathcal{S}(A)$$

donc, par caractérisation séquentielle des fermés :

$$\mathcal{S}(A) \text{ n'est pas fermé dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et on note λ_1, λ_2 ses racines, éventuellement confondues.

Dans ce cas, on sait que A est diagonalisable si, et seulement si, A est une matrice scalaire ou $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Par ailleurs, on sait que :

- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, il suit de la question 3 que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.
- Si $\lambda_1 = \lambda_2$, il suit des questions 1 et 4 que $\mathcal{S}(A)$ est fermée si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

En conclusion :

$S(A)$ est fermée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si, et seulement si, A est diagonalisable.

6. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on sait que

$$\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$$

de sorte que le discriminant de χ_A est :

$$\Delta_A = \operatorname{tr}(A)^2 - 4 \det(A).$$

Alors

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset \Leftrightarrow \Delta_A < 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$$

et donc

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset \Leftrightarrow 4 \det(A) - \operatorname{tr}(A)^2 > 0$$

(b) La famille $(e_1, u(e_1))$ est libre car sinon $u(e_1) \in \operatorname{Vect}(e_1)$ de sorte que e_1 est un vecteur propre pour u , ce qui contredit le fait que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$. Par dimension $(e_1, u(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(u) = \chi_u(u) = 0$ de sorte que

$$u^2 = \operatorname{tr}(A)u - \det(A)\operatorname{id}$$

et en particulier

$$u^2(e_1) = \operatorname{tr}(A)u(e_1) - \det(A)e_1.$$

Il s'ensuit que :

La matrice de u dans la base $(e_1, u(e_1))$ est : $\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$

(c) Soit $(M_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(A)^{\mathbb{N}}$ telle que $M_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'invariance de la trace et du déterminant par similitude impliquent que :

$$\operatorname{tr}(M_k) = \operatorname{tr}(A) \quad \text{et} \quad \det(M_k) = \det(A)$$

et, par continuité de la trace et du déterminant :

$$\operatorname{tr}(B) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \operatorname{tr}(M_k) = \operatorname{tr}(A) \quad \text{et} \quad \det(B) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \det(M_k) = \det(A).$$

Alors, d'après 6b, B est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$. Et puisque A est semblable à cette même matrice, il s'ensuit que $B \in \mathcal{S}(A)$.

Par caractérisation séquentielle des fermés :

$\mathcal{S}(A)$ est fermé.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Si χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, alors le raisonnement mené en 5 montre que $\mathcal{S}(A)$ est fermée si, et seulement si A est diagonalisable.
- Si χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, alors $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et on a vu en 6 que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

En conclusion :

$\mathcal{S}(A)$ est fermée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, A est diagonalisable ou $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

Partie II : matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est bornée

1. Pour tout x non nul de $\mathbb{K}^n$, il existe un scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$.

Si $y \in \mathbb{K}^n$ est colinéaire à x , on écrit $y = \mu x$ et $u(y) = u(\mu x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y$ de sorte que u induit une homothétie de rapport λ_x sur $\text{Vect}(x)$.

Si $y \in \mathbb{K}^n$ est non colinéaire à x , alors (x, y) est une famille libre et

$$u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y \quad \text{et} \quad u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

et, par identification des coefficients, $\lambda_y = \lambda_{x+y} = \lambda_x$. Ainsi, u est une homothétie de rapport λ_x .

En conclusion :

Une application linéaire qui stabilise toutes les droites est une homothétie.

2. Si u n'est pas une homothétie, il suit de la question précédente qu'il existe un vecteur x tel que $(x, u(x))$ est libre. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, la famille $(\alpha x, u(x))$ est aussi libre et, d'après le théorème de la base incomplète, elle se complète en une base de $\mathbb{K}^n$. Par construction, la matrice de u dans cette base a pour première colonne :

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La question précédente montre que, si A est une matrice non scalaire, alors A est semblable à une matrice B_k dont la première colonne est C_k telle que définie à la question précédente. En particulier,

$$\|B_k\|_\infty \geq \|C_k\|_\infty = k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

mais $B_k \in \mathcal{S}(A)$ donc $\mathcal{S}(A)$ est non bornée.

Réciproquement, si A est une matrice scalaire, alors $\mathcal{S}(A) = \{A\}$ d'après la question 1 de la première partie, et donc $\mathcal{S}(A)$ est bornée.

En conclusion :

$\mathcal{S}(A)$ est bornée si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

Partie II : matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est fermée

1. (a) Pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\chi_M(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \delta_{i,\sigma(i)} X - m_{i,\sigma(i)}$$

de sorte que chaque coefficient de χ_M s'exprime polynomialement en fonction des coefficients de M . En particulier, si on munit $\mathbb{C}_n[X]$ de la norme définie par

$$\left\| \sum_{i=0}^n a_i X^i \right\|_\infty = \sup_{i \in [0;n]} |a_i|,$$

alors $M \mapsto \chi_M$ est continue. Par équivalence des normes sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui est de dimension finie :

$$M \mapsto \chi_M \in C^0(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C}_n[X]).$$

- (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_k \in \mathcal{S}(A)$ donc il existe une matrice inversible P telle que $M_k = PAP^{-1}$. On montre alors classiquement que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, on a $Q(M_k) = PQ(A)P^{-1}$.
 En particulier, si Q est un polynôme annulateur de A , alors $Q(M_k) = PQ(A)P^{-1} = 0$.
 L'application $M \mapsto Q(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (car chacune de ses composantes est polynomiale). Ainsi :

$$Q(B) = Q\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} Q(M_k) = 0$$

donc :

Tout polynôme annulateur de A est un polynôme annulateur de B .

Puisque A est diagonalisable, A admet un polynôme annulateur π scindé à racines simples. Mais alors il suit de **1b** que π est un polynôme annulateur de B , toujours scindé à racines simples, et donc :

B est diagonalisable.

- (c) D'après la question précédente, (M_k) converge vers une matrice B diagonalisable. Par ailleurs, toutes les matrices M_k étant semblables à A , elles ont même polynôme caractéristique que A de sorte que, par continuité de $M \mapsto \chi_M$, on a :

$$\chi_B = \lim_{k \rightarrow +\infty} \chi_{M_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \chi_A = \chi_A.$$

Ainsi, A et B ont les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités algébriques. Étant toutes deux diagonalisables, leurs valeurs propres ont les mêmes multiplicités géométriques. Elles sont donc toutes les deux semblables à une même matrice diagonale, et donc semblables par transitivité. Ainsi, $B \in \mathcal{S}(A)$ et, par caractérisation séquentielle des fermés, on a montré :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, alors $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

2. Notons $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_k) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{k^{n-1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{k^{(n^2-n)/2}} \neq 0$$

donc $\mathcal{B}_k$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

En outre, pour tout $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a :

$$u\left(\frac{b_j}{k^{j-1}}\right) = \frac{1}{k^{j-1}} u(b_j) = \frac{1}{k^{j-1}} \sum_{i=1}^j t_{i,j} b_i = \sum_{i=1}^j t_{i,j} k^{i-j} t_{i,j} \frac{b_i}{k^{i-1}}$$

de sorte que, si on note $T^{(k)} = (t_{i,j}^{(k)})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_k$, on a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad t_{i,j}^{(k)} = k^{i-j} t_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \frac{t_{i,j}}{k^{j-i}} & \text{si } j \geq i \end{cases}.$$

En particulier,

$$T^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} D = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Mais pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $T^{(k)}$ est semblable à $\mathcal{S}(A)$ d'après 1c de sorte que $(T^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers la matrice diagonale D . La classe de similitude $\mathcal{S}(A)$ étant supposée fermée, $D \in \mathcal{S}(A)$ de sorte que A est semblable à une matrice diagonale, et donc diagonalisable.

En conclusion, on a montré :

$\mathcal{S}(A)$ est fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si, et seulement si, A est diagonalisable.

Partie IV : une classe de similitude est toujours d'intérieur vide

1. Par linéarité de la trace, on a :

$$\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M - A) = 0\} = A + \ker(\text{tr})$$

de sorte que :

$\mathcal{T}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de direction $\ker(\text{tr})$.

L'application $M \mapsto M + A$ étant un homéomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers lui-même (son inverse étant $M \mapsto M - A$), $\mathcal{T}$ est homéomorphe à $\ker(\text{tr})$. Or c'est un exercice classique que de montrer que tout sous-espace vectoriel $F \neq E$ d'un espace vectoriel E est d'intérieur vide. En effet, s'il existe $a \in \overset{\circ}{F}$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset F$. Alors pour tout x non nul dans E , on a $a + r \frac{x}{2 \|x\|} \in B(a, r) \subset F$ de sorte que

$$x = 2 \|x\| \left[\left(a + r \frac{x}{2 \|x\|} \right) - a \right] \in F$$

et donc $E = F$.

Puisque $\text{tr}(I_n) = n \neq 0$, $\ker(\text{tr}) \neq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donc $\ker(\text{tr})$ est d'intérieur vide, et par homéomorphisme :

$\mathcal{T}$ est d'intérieur vide.

2. Deux matrices semblables ayant même trace, on a $\mathcal{S}(A) \subset \mathcal{T}$. Alors

$$\mathcal{S}(A) \subset \overset{\circ}{\mathcal{T}} = \emptyset$$

de sorte que :

$\mathcal{S}(A)$ est d'intérieur vide.

*** Fin du sujet ***