Mines-Ponts - MP/MPI 2025 - Mathématiques 1

Éléments de correction

Inégalité de Hölder

1. Si x ou y est nul, alors l'inégalité est trivialement vérifiée. Supposons donc que $x, y > 0$. Par **concavité** du logarithme, puisque $0 \leq \frac{1}{p}, \frac{1}{q}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a :

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) = \ln x + \ln y = \ln(xy).$$

Par croissance de l'exponentielle, on a donc :

$$\boxed{xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.}$$

2. Supposons $\mathbf{E}[X^p] = \mathbf{E}[Y^q] = 1$. D'après l'inégalité établie à la question **1.**, on a

$$XY \leq \frac{X^p}{p} + \frac{Y^q}{q}$$

donc, par croissance et linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}[XY] \leq \frac{1}{p}\mathbf{E}[X^p] + \frac{1}{q}\mathbf{E}[Y^q] = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \mathbf{E}[X^p]^{1/p}\,\mathbf{E}[Y^q]^{1/q}$$

donc l'inégalité de Hölder est vérifiée.
Dans le cas général, on commence par observer que si $\mathbf{E}[X^p] = 0$, alors par positivité de X, on a $\mathbf{P}(X^p = 0) = 1$, c'est-à-dire que X est nulle. Dans ce cas, les deux membres de l'inégalité de Hölder sont nuls, et l'inégalité est satisfaite. Il en est de même si $\mathbf{E}[Y^q] = 0$. On suppose donc que $\mathbf{E}[X^p] > 0$ et $\mathbf{E}[Y^q] > 0$ et on pose

$$X_0 = \frac{X}{\mathbf{E}[X^p]^{1/p}} \quad \text{et} \quad Y_0 = \frac{Y}{\mathbf{E}[Y^q]^{1/q}}$$

de sorte que

$$\mathbf{E}\left[X_0^p\right] = \mathbf{E}\left[\frac{X^p}{\mathbf{E}[X^p]}\right] = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\left[Y_0^p\right] = \mathbf{E}\left[\frac{Y^q}{\mathbf{E}[Y^q]}\right] = 1.$$

Alors, d'après l'inégalité de Hölder pour X_0 et Y_0, on a :

$$\mathbf{E}[X_0Y_0] \leq \mathbf{E}\left[X_0^p\right]^{1/p}\mathbf{E}\left[Y_0^q\right]^{1/q} = 1$$

mais, par linéarité :

$$\mathbf{E}[X_0Y_0] = \mathbf{E}\left[\frac{XY}{\mathbf{E}[X^p]^{1/p}\,\mathbf{E}[Y^q]^{1/q}}\right] = \frac{\mathbf{E}[XY]}{\mathbf{E}[X^p]^{1/p}\,\mathbf{E}[Y^q]^{1/q}}$$

donc :

$$\boxed{\mathbf{E}[XY] \leq \mathbf{E}[X^p]^{1/p}\,\mathbf{E}[Y^q]^{1/q}.}$$

3. Si $p = q = 2$, on retrouve l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$\boxed{\mathbf{E}[XY] \leq \sqrt{\mathbf{E}[X^2]}\sqrt{\mathbf{E}[Y^2]}}$$

que l'on démontre directement en observant que la fonction

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathbf{E}\left[(X+tY)^2\right] \end{array} \right.$$

est polynomiale de degré 2 à valeurs positives, de sorte que son discriminant

$$\Delta = 4\mathbf{E}[XY]^2 - 4\mathbf{E}\left[X^2\right]\mathbf{E}\left[Y^2\right]$$

est négatif.

Une inégalité de déviation

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad e^{t^2/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!}$$

mais, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(2k)! = k! \times \prod_{i=k+1}^{2k} i = k! \times \prod_{i=1}^{k} \underbrace{(k+i)}_{\geq 2} \geq k! 2^k$$

et cette inégalité reste vraie pour $k = 0$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{t^{2k}}{2^k k!}$$

donc :

$$\boxed{\mathrm{ch}(t) \leq e^{t^2/2}.}$$

5. On montre l'inégalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : Soit $t \in \mathbb{R}_+$, $c_1 \in \mathbb{R}$ et X_1 une variable aléatoire de Rademacher. D'après le **théorème de transfert** et la question **4.**, on a :

$$\mathbf{E}[\exp(tc_1 X_1)] = \frac{1}{2}e^{tc_1} + \frac{1}{2}e^{-tc_1} = \mathrm{ch}(tc_1) \leq \exp\left(\frac{t^2 c_1^2}{2}\right)$$

Hérédité : Soit $t \in \mathbb{R}_+$, $(c_1, \ldots, c_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ une suite de vaiid de Rademacher. On suppose que

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)\right] \leq \exp\left(t\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right).$$

On a

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n+1} c_i X_i\right)\right] = \mathbf{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)\exp(tc_{n+1}X_{n+1})\right]$$

mais puisque les X_i sont indépendantes, le **lemme des coalitions** assure que

$$\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) \perp\!\!\!\perp \exp(tc_{n+1}X_{n+1})$$

et, par **multiplicativité de l'espérance** pour les variables aléatoires indépendantes, puis par hypothèse de récurrence et initialisation, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n+1}c_iX_i\right)\right] &= \mathbf{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)\exp\left(tc_{n+1}X_{n+1}\right)\right]\\ &\leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right)\exp\left(\frac{t^2}{2}c_{n+1}^2\right)\\ &= \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n+1}c_i^2\right).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien :

$$\boxed{\mathbf{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)\right] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right).}$$

6. Posons $S_n = x\sum_{i=1}^{n}c_iX_i$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right|\right) > e^{tx}\right) &= \mathbf{P}\left(\exp\left(|S_n|\right) > e^{tx}\right)\\ &= \mathbf{P}\left(|S_n| > tx\right)\\ &= \mathbf{P}\left(S_n > tx\right) + \mathbf{P}\left(-S_n > tx\right)\end{aligned}$$

mais les X_i sont de Rademacher donc $X_i \sim -X_i$ de sorte que $S_n \sim -S_n$ et donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(S_n > tx\right) + \mathbf{P}\left(-S_n > tx\right) &= 2\mathbf{P}\left(S_n > tx\right)\\ &= 2\mathbf{P}\left(\exp(S_n) > e^{tx}\right)\\ &\leq 2e^{-tx}\mathbf{E}\left[\exp(S_n)\right],\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant donnée par l'**inégalité de Markov**.
Mais, d'après la question **5.**, on a :

$$\mathbf{E}\left[\exp(S_n)\right] = \mathbf{E}\left[\exp\left(x\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)\right] \leq \exp\left(\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right)$$

de sorte que :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right|\right) > e^{tx}\right) \leq 2e^{-tx}\exp\left(\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right).}$$

7. Si $t = 0$, l'inégalité est trivialement vérifiée. Supposons $t > 0$. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right| > t\right) = \mathbf{P}\left(x\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right| > tx\right) = \mathbf{P}\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\right) > e^{tx}\right)$$

et, d'après la question **6.**, on a donc :

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right| > t\right) \leq 2e^{-tx}\exp\left(\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right).$$

D'autre part, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
2e^{-tx}\exp\left(\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right) &\Leftrightarrow \exp\left(-tx+\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right) \\
&\Leftrightarrow -tx+\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2 \leq -\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2} \\
&\Leftrightarrow x^2\left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right)^2 - 2tx\left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right) + t^2 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x\left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right) - t\right)^2 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{t}{\sum_{i=1}^n c_i^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $x = \dfrac{t}{\sum_{i=1}^n c_i^2} > 0$, on a bien :

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| > t\right) \leq 2e^{-tx}\exp\left(\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$$

et donc :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| > t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right).}$$

Inégalités de Khintchine

8. Puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ est fini, il existe une famille de réels $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ telle que $X(\Omega) \subset \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$. Alors :

$$\forall t > x_N, \quad F_X(t) = \mathbf{P}(X > t) = 0$$

de sorte que

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x_N} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, F_X est **continue par morceaux** sur le **segment** $[0, x_N]$, car constante sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$, avec $0 \leq i \leq N-1$. Il s'ensuit que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

En outre, pour tout $i \in [\![0; N-1]\!]$, pour tout $t \in [x_i, x_{i+1}[$, on a :

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X > t) = \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k=i+1}^{N} (X = x_k)\right) = \sum_{k=i+1}^{N} \mathbf{P}(X = x_k)$$

de sorte que, par **relation de Chasles** :

$$p\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t = p\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= p \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} \mathbf{P}(X = x_k) \int_{x_i}^{x_{i+1}} t^{p-1} \, \mathrm{d}t$$
$$= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} \mathbf{P}(X = x_k) \left(x_{i+1}^p - x_i^p\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(X = x_k) \sum_{i=0}^{k-1} \left(x_{i+1}^p - x_i^p\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(X = x_k) \, x_k^p$$
$$= \mathbf{E}\left[X^p\right],$$

la dernière égalité étant assurée par le **théorème de transfert**.

9. La fonction $t \mapsto t^3 e^{-t^2/2}$ est **continue** sur $[0;+\infty[$ donc intégrable sur le **segment** $[0;1]$. D'autre part

$$t^3 e^{-t^2/2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et, d'après le **critère de Riemann**, $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc, par **domination**, $t \mapsto t^3 e^{-t^2/2}$ aussi. En conclusion, $t \mapsto t^3 e^{-t^2/2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$ et donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Dorénavant, sauf mention contraire, nous noterons

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i.$$

Il suit de la question **8.** que :

$$\mathbf{E}\left[S_n^4\right] = 4 \int_0^{+\infty} t^3 F_{S_n}(t) \, \mathrm{d}t.$$

Mais, pour tout $t \geq 0$, il suit de la question **7.** que :

$$F_{S_n}(t) = \mathbf{P}(S_n > t) \leq \mathbf{P}(|S_n| > t) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

donc :

$$\mathbf{E}\left[S_n^4\right] = 8 \int_0^{+\infty} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right] \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t.}$$

10. On le montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : Si X_1 est une variable aléatoire de Rademacher et $c_1 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbf{E}\left[(c_1 X_1)^2\right] = c_1^2 \mathbf{E}\left[X_1^2\right]$$

mais $X_1^2 = 1$ donc on a bien $\mathbf{E}\left[(c_1X_1)^2\right] = c_1^2$.
Hérédité : Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ des vaiid de Rademacher et $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$ des réels. On suppose que

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

Avec les notations précédemment utilisées, on a

$$S_{n+1} = S_n + c_{n+1}X_{n+1}$$

et, d'après le **lemme des coalitions** $S_n \perp\!\!\!\perp c_{n+1}X_{n+1}$ donc, par **linéarité** et **multiplicativité** de l'espérance pour les variables aléatoires indépendantes, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[S_{n+1}^2\right] &= \mathbf{E}\left[(S_n + c_{n+1}X_{n+1})^2\right] \\ &= \mathbf{E}\left[S_n^2 + 2c_{n+1}S_nX_{n+1} + c_{n+1}^2X_{n+1}^2\right] \\ &= \mathbf{E}\left[S_n^2\right] + 2c_{n+1}\mathbf{E}\left[S_n\right]\mathbf{E}\left[X_{n+1}\right] + c_{n+1}^2\mathbf{E}\left[X_{n+1}^2\right]\end{aligned}$$

mais $\mathbf{E}\left[X_{n+1}\right] = 0$, $\mathbf{E}\left[X_{n+1}^2\right] = 1$ et, par hypothèse de récurrence $\mathbf{E}\left[S_n^2\right] = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i^2$ donc :

$$\mathbf{E}\left[S_{n+1}^2\right] = \sum_{i=1}^{n+1} c_i^2,$$

d'où l'hérédité.
En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.}$$

11. **Remarque :** *L'énoncé ne le précise pas mais il va de soi que le β_p recherché doit être indépendant de $(c_1, \ldots, c_n)$, sans quoi la question n'a aucun intérêt...*
Soit $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|c\|_2 = 1$. En reprenant le raisonnement de la question **9.**, on a :

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^p\right] \leq 2pI_p,$$

où $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
Soit $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul. On a donc :

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\|c\|_2} X_i\right)^p\right] \leq 2pI_p$$

donc

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^p\right] \leq 2pI_p\,\|c\|_2^p$$

et donc

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^p\right]^{1/p} \leq (2pI_p)^{1/p}\,\|c\|_2\,.$$

Ainsi, si on pose $\beta_p = (2pI_p)^{1/p}$, il suit de la question **10.** que $\|c\|_2 = \mathbf{E}\left[\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right]^{1/2}$ et donc que :

$$\boxed{\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^p\right]^{1/p} \leq \beta_p \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right]^{1/2}}$$

12. Soit $X \in \mathcal{L}^0(\Omega)$. Puisque $p > 2$, $\dfrac{p}{2} > 1$ et donc en posant $q = \dfrac{1}{1-2/p}$ on peut appliquer l'inégalité de Hölder :

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = \mathbf{E}\left[X^2 \times 1\right] \leq \mathbf{E}\left[(X^2)^{p/2}\right]^{2/p} \mathbf{E}\left[1^q\right]^{1/q},$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] \leq \mathbf{E}\left[X^p\right]^{2/p}$$

et, en passant à la racine :

$$\mathbf{E}\left[X^2\right]^{1/2} \leq \mathbf{E}\left[X^p\right]^{1/p}.$$

Il suffit d'appliquer cette inégalité à $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ et on obtient :

$$\boxed{\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right]^{1/2} \leq \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^p\right]^{1/p}.}$$

13. Soit $f : \theta \mapsto \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{4} \in C^\infty([0;1], \mathbb{R})$. Pour tout $\theta \in [0;1]$, on a :

$$f'(\theta) = \frac{4-p}{4p} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $[0;1]$. Alors f est une **bijection continue** de $[0;1]$ vers $[f(0); f(1)]$. Par ailleurs,

$$f(0) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$$

donc :

$$\boxed{\exists! \theta \in]0;1[, \quad \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4} = \frac{1}{2}.}$$

14. On observe que $\frac{2\theta}{p} > 0$, $\frac{1-\theta}{2} > 0$ et que, par définition de θ :

$$\frac{2\theta}{p} + \frac{1-\theta}{2} = 2f(\theta) = 1.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder avec

$$X = |S_n|^{2\theta} \quad \text{et} \quad Y = |S_n|^{2(1-\theta)}$$

on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[S_n^2\right] &= \mathbf{E}\left[|S_n|^2\right] \\
&= \mathbf{E}\left[XY\right] \\
&\leq \mathbf{E}\left[X^{\frac{p}{2\theta}}\right]^{\frac{2\theta}{p}} \mathbf{E}\left[Y^{\frac{2}{1-\theta}}\right]^{\frac{1-\theta}{2}} \\
&= \mathbf{E}\left[|S_n|^p\right]^{\frac{2\theta}{p}} \mathbf{E}\left[|S_n|^4\right]^{\frac{1-\theta}{2}},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right] \leq \mathbf{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right]^{\frac{2\theta}{p}} \mathbf{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^4\right]^{\frac{1-\theta}{2}}}$$

15. D'après la question **14.**, on a :

$$\mathbf{E}\left[S_n^2\right] \leq \mathbf{E}\left[|S_n|^p\right]^{\frac{2\theta}{p}} \mathbf{E}\left[|S_n|^4\right]^{\frac{1-\theta}{2}}$$

mais, d'après la question **11.**, on a :

$$\mathbf{E}\left[|S_n|^4\right]^{1/4} \leq \beta_4 \mathbf{E}\left[|S_n|^2\right]^{1/2}$$

donc, en élevant à la puissance $2(1-\theta) > 0$, il vient :

$$\mathbf{E}\left[|S_n|^4\right]^{\frac{1-\theta}{2}} \leq \beta_4^{2(1-\theta)} \mathbf{E}\left[|S_n|^2\right]^{1-\theta}$$

et donc, en injectant :

$$\mathbf{E}\left[S_n^2\right] \leq \mathbf{E}\left[|S_n|^p\right]^{\frac{2\theta}{p}} \beta_4^{2(1-\theta)} \mathbf{E}\left[|S_n|^2\right]^{1-\theta}.$$

En simplifiant par $\mathbf{E}\left[|S_n|^2\right]^{1-\theta}$, on a donc :

$$\mathbf{E}\left[S_n^2\right]^{\theta} \leq \mathbf{E}\left[|S_n|^p\right]^{\frac{2\theta}{p}} \beta_4^{2(1-\theta)}$$

et en élevant à la puissance $\frac{1}{2\theta} > 0$, il vient :

$$\mathbf{E}\left[S_n^2\right]^{1/2} \leq \mathbf{E}\left[|S_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} \beta_4^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

de sorte qu'en posant $\widetilde{\alpha}_p = \beta_4^{\frac{\theta-1}{\theta}} > 0$, il vient :

$$\boxed{\widetilde{\alpha}_p \mathbf{E}\left[S_n^2\right]^{1/2} \leq \mathbf{E}\left[|S_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}.}$$

16. **Remarque :** *La question laisse perplexe au premier abord vu qu'elle est parfaitement identique à la précédente... sauf si on se souvient que l'hypothèse $1 \leq p < 2$ n'était valide que jusqu'à la question 15 ! Il s'agit donc de montrer l'existence d'un α_p pour n'importe quel $p \geq 1$. L'énoncé omettant de préciser $\alpha_p > 0$, n'importe quel $\alpha_p \leq 0$ conviendrait, mais cela serait de peu d'intérêt pour la suite.*

Soit $p \in [1;+\infty[$.

— si $p < 2$, il suffit de poser $\alpha_p = \widetilde{\alpha}_p$ construit à la question **15.** ;

— si $p \geq 2$, il suffit de poser $\alpha_p = 1$ et d'appliquer la question **12.**.

En conclusion :

$$\boxed{\forall p \in [1;+\infty[\,,\ \exists \alpha_p \in]0;+\infty[\,,\quad \alpha_p \mathbf{E}\left[S_n^2\right]^{1/2} \leq \mathbf{E}\left[|S_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}.}$$

Une première conséquence

17. L'application φ est symétrique par **commutativité** du produit dans $\mathbb{R}$ et bilinéaire par **bilinéarité de la multiplication** et **linéarité de l'espérance**. Montrons que φ est définie positive.

Soit $X \in \mathcal{L}^0(\Omega)$. Par **croissance** de l'espérance, on a :

$$\varphi(X,X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] \geq 0.$$

En outre, puisque X^2 est positive, $\mathbf{E}\left[X^2\right] = 0$ si, et seulement si, X est nulle.

En conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{L}^0(\Omega).}$$

18. Soit $u \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et soit $n_u = \max\{i \in \mathbb{N} \mid u_i \neq 0\}$. Alors

$$\psi(u) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i = \sum_{i=0}^{n_u} u_i X_i$$

est une somme finie de variables aléatoires sur Ω ; c'est donc une variable aléatoire sur Ω.
Soient u et v deux suites de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Les sommes étant à support fini, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\psi(u), \psi(v)) &= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j X_j\right)\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_i v_j X_i X_j\right] \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_i v_j \mathbf{E}\left[X_i X_j\right]
\end{aligned}$$

mais les X_i sont des variables aléatoires **indépendantes** de sorte que $\mathbf{E}\left[X_i X_j\right] = \mathbf{E}[X_i]\,\mathbf{E}\left[X_j\right]$ si $i \neq j$, et elles sont de Rademacher de sorte que $\mathbf{E}[X_i] = 0$ et $\mathbf{E}\left[X_i^2\right] = 1$. En conclusion $\mathbf{E}\left[X_i X_j\right] = \delta_{i,j}$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\varphi(\psi(u), \psi(v)) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_i v_j \delta_{i,j} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} u_i v_i \\
&= \langle u, v\rangle .
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\psi : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow \mathcal{L}^0(\Omega) \text{ préserve le produit scalaire.}}$$

19. **Remarque :** *En parlant de normes $\|\cdot\|_p$, et $\|\cdot\|_q$ sur $\psi(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})$, cette question sous-entend que l'on identifie $\psi(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})$ avec $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ à l'aide de l'isométrie ψ de la question* **18.***. C'est assez naturel mais cela aurait probablement été plus judicieux de l'expliciter...*
Sur $\psi(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})$, les questions **11.** et **16.** montrent que $\|\cdot\|_p$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_2$. Ceci étant valable pour tout $p \geq 1$, c'est aussi valable pour q. Ainsi, $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont toutes deux équivalentes à $\|\cdot\|_2$. Par **transitivité** de la relation d'équivalence des normes :

$$\boxed{\text{Pour tous } p, q \geq 1,\ \|\cdot\|_p \text{ et } \|\cdot\|_q \text{ sont équivalentes.}}$$

Une deuxième conséquence

20. Soit $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$. D'après le **théorème de transfert** appliqué au vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_k)$, on a :

$$\mathbf{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right|\right] = \sum_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k)\in\{\pm1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i \epsilon_i\right| \mathbf{P}\left(X_1 = \epsilon_1, X_2 = \epsilon_2, \ldots, X_k = \epsilon_k\right)$$

mais les X_i sont indépendantes et de Rademacher donc :

$$\mathbf{E}\left[\left|\sum_{i=1}^k a_i X_i\right|\right] = \frac{1}{2^k}\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\in\{\pm 1\}^k}\left|\sum_{i=1}^k a_i\epsilon_i\right|$$

ou encore :

$$\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\in\{\pm 1\}^k}\left|\sum_{i=1}^k a_i\epsilon_i\right| = n\mathbf{E}\left[\left|\sum_{i=1}^k a_i X_i\right|\right].$$

Mais les questions **11.** et **16.** appliquées avec $p = 1$ montrent que :

$$\alpha_1\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^k a_i X_i\right)^2\right]^{1/2} \leq \mathbf{E}\left[\left|\sum_{i=1}^k a_i X_i\right|\right] \leq \beta_1\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^k a_i X_i\right)^2\right]^{1/2}$$

donc :

$$\alpha_1 n\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^k a_i X_i\right)^2\right]^{1/2} \leq \sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\in\{\pm 1\}^k}\left|\sum_{i=1}^k a_i\epsilon_i\right| \leq \beta_1 n\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^k a_i X_i\right)^2\right]^{1/2}$$

et il suit de la question **10.** que

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^k a_i X_i\right)^2\right]^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} = \|a\|_2^{\mathbb{R}^k}$$

de sorte que :

$$\boxed{\alpha_1 n\,\|a\|_2^{\mathbb{R}^k} \leq \sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\in\{\pm 1\}^k}\left|\sum_{i=1}^k a_i\epsilon_i\right| \leq \beta_1 n\,\|a\|_2^{\mathbb{R}^k}.}$$

21. On considère l'application

$$T : \begin{cases} \mathbb{R}^k & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ a = (a_1,\dots,a_k) & \mapsto \quad T(a) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^k a_i\epsilon_i\right)_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\in\{\pm 1\}^k} \end{cases}.$$

Pour faciliter la compréhension, nous explicitons le cas $k = 3$ en ordonnant les éléments de $\{\pm 1\}^3$ dans l'ordre lexicographique :

$$T(a_1,a_2,a_3) = \begin{pmatrix} -a_1 - a_2 - a_3 \\ -a_1 - a_2 + a_3 \\ -a_1 + a_2 - a_3 \\ -a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 - a_2 - a_3 \\ a_1 - a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 - a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8.$$

On observe que T est linéaire et que $\ker(T) = \{0_{\mathbb{R}^k}\}$ de sorte que T **induit un isomorphisme de** $\mathbb{R}^k$ **vers** $\mathrm{im}(T) \subset \mathbb{R}^n$. On pose donc :

$$\boxed{F = \mathrm{im}(T) \subset \mathbb{R}^n.}$$

On observe aussi que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $a \in \mathbb{R}^k$, on a :

$$\|T(a)\|_1^{\mathbb{R}^n} = \sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\in\{\pm 1\}^k} \left|\sum_{i=1}^k a_i\epsilon_i\right|$$

et, une récurrence sur k montre que :

$$\left(\|T(a)\|_2^{\mathbb{R}^n}\right)^2 = \sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\in\{\pm 1\}^k} \left(\sum_{i=1}^k a_i\epsilon_i\right)^2 = 2^k \sum_{i=1}^k a_i^2 = 2^k \left(\|a\|_2^{\mathbb{R}^k}\right)^2 = n\left(\|a\|_2^{\mathbb{R}^k}\right)^2$$

de sorte que

$$\|T(a)\|_2^{\mathbb{R}^n} = \sqrt{n}\,\|a\|_2^{\mathbb{R}^k}.$$

Soit $x \in F$. Il existe $a \in \mathbb{R}^k$ tel que $x = T(a)$. Alors, il suit de la question **20.** que :

$$\alpha_1 n\,\|a\|_2^{\mathbb{R}^k} \leq \|T(a)\|_1^{\mathbb{R}^n} \leq \beta_1 n\,\|a\|_2^{\mathbb{R}^k}$$

et donc que

$$\alpha_1\sqrt{n}\,\|T(a)\|_2^{\mathbb{R}^n} \leq \|T(a)\|_1^{\mathbb{R}^n} \leq \beta_1\sqrt{n}\,\|T(a)\|_2^{\mathbb{R}^n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in F, \quad \alpha_1\sqrt{n}\,\|x\|_2^{\mathbb{R}^n} \leq \|x\|_1^{\mathbb{R}^n} \leq \beta_1\sqrt{n}\,\|x\|_2^{\mathbb{R}^n}}$$

*** Fin du sujet ***