CCINP - MP 2025 - Mathématiques 1

Éléments de correction

Exercice 1

Q1. $]-1;1[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, c'est donc un connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Puisque f est de classe C^1, f' est continue. L'image d'un connexe par arcs par une application continue étant connexe par arcs, on a :

$$\boxed{f'(]-1;1[) \text{ est connexe par arcs.}}$$

Q2. **a)** f est constante sur $]-1,0]$ donc dérivable à gauche en 0, de dérivée à gauche nulle.
Pour tout $h > 0$, on a

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \left(h\sin\left(\frac{1}{h}\right), h\cos\left(\frac{1}{h}\right)\right) \xrightarrow[h\to 0]{} (0,0)$$

donc f est dérivable à droite en 0, de dérivée à droite nulle. En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = (0,0).}$$

f est constante sur $]-1;0[$ donc de dérivée nulle sur cet intervalle. Par ailleurs, pour tout $t \in]0;1[$, en dérivant composante par composante, on a :

$$f'(t) = \left(2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right),\ 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall t \in]-1;1[, \quad f'(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } t \in]-1;0], \\ \left(2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right),\ 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) & \text{si } t \in]0;1[. \end{cases}}$$

b) Pour tout $t \in]0;1[$, on a

$$\left\|f'(t)\right\|_2^2 = \left(2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 + \left(2t\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 = 1 + 4t^2 > 1$$

donc

$$\boxed{\left\|f'(t)\right\|_2 > 1.}$$

Si on note $\overline{B}(0,1)$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$, on a donc :

$$f'(]0;1[) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(0,1)$$

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

mais

$$f'(]-1;0]) = \{0\}.$$

Par l'absurde, supposons $f'(]0;1[)$ connexe par arcs et notons $N = \|\cdot\|_2$. La norme étant continue, $N(f'(]0;1[))$ est aussi connexe par arcs, or le raisonnement précédent montre que $N(f'(]0;1[))$ contient 0, des nombres $\alpha > 1$ mais aucun nombre strictement compris entre 0 et 1. Il s'ensuit que $N(f'(]0;1[))$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ et n'est donc pas connexe par arcs, une contradiction.

En conclusion :

$$\boxed{f'(]0;1[) \text{ n'est pas connexe par arcs.}}$$

Exercice 2

Q3. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla(f)(x,y) = (12x + 6y - 10,\ 6x + 4y - 6).$$

Alors

$$\nabla(f)(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 12x + 6y - 10 & = 0 \\ 6x + 4y - 6 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{1}{3} \\ y & = 1 \end{cases}$$

de sorte que f admet $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$ pour unique point critique.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

qui est symétrique réelle donc diagonalisable, $\det(\nabla^2(f)(x,y)) = 12 > 0$ et $\operatorname{tr}(\nabla^2(f)(x,y)) = 16 > 0$ de sorte que $\nabla^2(f)(x,y)$ admet deux valeurs propres strictement positives. C'est en particulier vrai pour $\nabla^2(f)\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$ et donc :

$$\boxed{f \text{ présente un minimum local en } \left(\frac{1}{3}, 1\right) \text{ et } f\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \frac{4}{3}.}$$

Q4. Par construction de la projection orthogonale p_F, on a $a - p_F(a) \in F^\perp$ de sorte que

$$\boxed{\langle a - b, u\rangle = \langle a - b, v\rangle = 0.}$$

Si on pose $b = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\langle a - b, u\rangle = \langle (2-x, 1-y, 1-z), (1,1,2)\rangle = 5 - x - y - 2z$$
$$\langle a - b, v\rangle = \langle (2-x, 1-y, 1-z), (1,0,1)\rangle = 3 - x - z$$

de sorte que

$$\begin{cases} 5 - x - y - 2z & = 0 \\ 3 - x - z & = 0 \end{cases}.$$

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

D'autre part, on a

$$F^{\perp} = \mathrm{Vect}(u,v)^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{rl} x+y+2z & = 0 \\ x+z & 0 \end{array} \right. \right\} = \mathrm{Vect}((1,1,-1))$$

de sorte que

$$F = (1,1,-1)^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y-z=0\right\}.$$

Puisque $b \in F$, on a

$$\left\{ \begin{array}{rl} 5-x-y-2z & = 0 \\ 3-x-z & = 0 \\ x+y-z & = 0 \end{array} \right.$$

de sorte que

$$\boxed{b = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).}$$

On observe alors que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x,y) = \|a - xu - yv\|^2$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) &= \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \|a - xu - yv\|^2 \\
&= \min_{f \in F} \|a - f\|^2 \\
&= d(a,F)^2 \\
&= \|a - p_F(a)\|^2 \\
&= \|a - b\|^2 \\
&= \left\|\left(2 - \frac{4}{3},\ 1 - \frac{1}{3},\ 1 - \frac{5}{3}\right)\right\|^2 \\
&= \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

On retrouve donc bien le résultat de la question **Q3** :

$$\boxed{\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \frac{4}{3}.}$$

Problème

Partie I - Théorème de comparaison avec une intégrale

Q5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque f est positive, on a :

$$S_{n+1} - S_n = f(n+1) \geq 0$$

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

et, par relation de Chasles et croissance de l'intégrale :

$$J_{n+1} - J_n = \int_n^{n+1} \underbrace{f(t)}_{\geq 0} \, dt \geq 0.$$

de sorte que :

$$\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont croissantes.}}$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, puisque f est décroissante, on a :

$$\forall t \in [k-1, k], \quad f(k) \leq f(t) \leq f(k-1)$$

et, en intégrant sur $[k-1, k]$, il vient :

$$\boxed{f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t) \, dt \leq f(k-1).}$$

Q6. En sommant l'inégalité établie en **Q5** pour k variant de 1 à n, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t) \, dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k-1)$$

mais

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n - f(0), \qquad \sum_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$$

et, par relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t) \, dt = \int_0^n f(t) \, dt = J_n$$

de sorte que

$$\boxed{S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}.}$$

Q7. Supposons que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$. La première inégalité établie en **Q6** montre que (S_n) est majorée par $f(0) + \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$. Or, on a établi en **Q5** que (S_n) est croissante, de sorte qu'elle converge. Autrement dit, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge.

Réciproquement, supposons que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge et notons S sa somme. Alors la seconde inégalité établie en **Q6** montre que (J_n) est majorée par S. Mais, par positivité de f et croissance de l'intégrale, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^x f(t) \, dt \leq \int_0^{\lfloor x \rfloor + 1} f(t) \, dt = J_{\lfloor x \rfloor + 1} \leq S.$$

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

Ainsi, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée et croissante sur $\mathbb{R}_+$ car dérivable de dérivée $f \geq 0$. Elle admet donc une limite finie en $+\infty$. Autrement dit, $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et, puisque f est positive, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$.
On a donc établi :

$$\boxed{f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+) \iff \sum_{n \geq 0} f(n) \text{ converge.}}$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k) \right] = J_n - S_n + f(0).$$

D'après l'inégalité établie en **Q6**, on a :

$$0 \leq J_n - S_n + f(0) \leq S_{n-1} - S_n + f(0) = f(0) - f(n) \leq f(0).$$

D'autre part,

$$U_{n+1} - U_n = J_{n+1} - J_n - S_{n+1} + S_n = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n+1) \geq 0$$

donc la suite (U_n) est croissante et majorée ; elle converge donc. Autrement dit :

$$\boxed{\sum_{k \geq 1} \left[\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k) \right] \text{ converge.}}$$

Q8. **a)** f est de classe C^∞ et positive sur $[2; +\infty[$ et :

$$\forall x \geq 2, \qquad f'(x) = -\ln(x)^{\alpha-1} \frac{\alpha + \ln(x)}{(x \ln^{\alpha}(x))^2} < 0$$

de sorte que f est décroissante sur $[2; +\infty[$.
Par ailleurs, pour tout $x \geq 2$, on a :

$$\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^x \frac{1}{t} \ln(t)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_2^x = \frac{\ln(x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\ln(2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

de sorte que :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ \dfrac{\ln(2)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

et, d'après **Q7** (la borne inférieure de la sommation et de l'intégrale étant sans incidence sur le raisonnement), on a :

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

$$\boxed{\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1.}$$

Remarque : C'est un cas particulier d'*intégrale de Bertrand*, lesquelles reviennent classiquement dans les sujets de concours.

b) En notant $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$ et $J_n = \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t$, le raisonnement effectué en **Q6** montre que pour $n \geq 3$, on a :

$$S_n - f(2) \leq J_n \leq S_{n-1}$$

donc

$$J_{n+1} \geq S_n \leq J_n + f(2)$$

et, en faisant tendre n vers $+\infty$, il suit de **Q8** que :

$$\boxed{\frac{1}{\ln(2)} \leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k\ln(k)^2} \leq \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{2\ln(2)^2}}$$

Q9. **a)** Posons $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Alors, d'après le point (2) de **Q7** (en sommant à partir de 2), on sait que :

$$\sum_{k\geq 2}\left[\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{k}\right] \text{ converge}$$

mais pour tout $n \geq 2$, par relation de Chasles, on a :

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{k}\right) = \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

de sorte que

$$\boxed{T_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \ln(n) \text{ converge.}}$$

Remarque : La limite $\gamma = \lim_{n\to+\infty} T_n$ est appelée *constante d'Euler-Mascheroni*. C'est aussi un grand classique des concours, voir par exemple l'exercice 1 de E3A MP 2018.

b) On a $\lim_{n\to+\infty} T_n = \gamma$ donc $T_n - \gamma \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, où encore :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).}$$

Puisque $\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a $\gamma + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$ donc

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Q10. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g_n'(x) = \frac{(n-x)(n+x)}{(n^2+x^2)^2}$$

donc on a le tableau de variation :

x	0		n		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2n}$	$\searrow$	0

donc $\|g_n\|_\infty = \dfrac{1}{2n}$. Mais alors

$$\sum_{n\geq 1} \|g_n\|_\infty = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} \text{ diverge}$$

de sorte que :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} g_n \text{ ne converge pas normalement sur }]0;+\infty[.}$$

b) *Ici l'énoncé fait uniquement l'hypothèse que x est non nul mais il semble raisonnable de supposer que x est strictement positif eu égard au contexte, ce que nous ferons dans la suite.*
La fonction f est dérivable et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(t) = -\frac{2xt}{(t^2+x^2)^2}$$

de sorte que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et, en sommant de 1 à n, on obtient par relation de Chasles :

$$\boxed{\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. L'inégalité obtenue en **b)** se réécrit :

$$\int_1^{n+1} \frac{x}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k^2+x^2} \leq \int_0^n \frac{x}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t$$

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k^2+x^2} = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right] = \frac{x}{t^2+x^2}$$

donc cette inégalité se réécrit :

$$\arctan\left(\frac{n+1}{x}\right) - \arctan\frac{n}{x} \leq \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \leq \arctan\frac{1}{x}$$

et, en passant à la limite en n, on a :

$$\boxed{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x) \leq \frac{\pi}{2}}$$

d) On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ donc, par encadrement à partir de l'inégalité obtenue en **c)** :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x)\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\lim_{x\to 0} g_n(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{n^2+x^2} = 0.$$

Par l'absurde, s'il y avait convergence uniforme sur $]0; +\infty[$, puisque g_n admet une limite finie en $+\infty$, le **théorème de la double limite** impliquerait que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\underbrace{\lim_{x\to+\infty} g_n(x)}_{=0}\right) = 0,$$

une contradiction.

En conclusion :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} g_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]0; +\infty[.}$$

Partie II - Contre-exemples

Q11. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in \left[n; n+\frac{1}{2}\right]$, on a $2n\pi \leq 2\pi t \leq (2n+1)\pi$ donc $\sin(2\pi t) \geq 0$ de sorte que

$$\int_n^{n+\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+\frac{1}{2}} \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}\right]_n^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\cos(2n\pi) - \cos((2n+1)\pi}{2\pi} = \frac{(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}}{2\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

De même, on obtient :

$$\int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}$$

donc

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

$$\boxed{\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}.}$$

b) Soit $x \geq 1$. Par relation de Chasles, on a :

$$\int_1^x |\sin(2\pi t)|\ \mathrm{d}t = \int_1^{\lfloor x \rfloor} |\sin(2\pi t)|\ \mathrm{d}t + \underbrace{\int_{\lfloor x \rfloor}^x |\sin(2\pi t)|\ \mathrm{d}t}_{\geq 0} \geq \int_1^{\lfloor x \rfloor} |\sin(2\pi t)|\ \mathrm{d}t$$

mais, par relation de Chasles et **a)**, on a :

$$\int_1^{\lfloor x \rfloor} |\sin(2\pi t)|\ \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \underbrace{\int_k^{k+1} |\sin(2\pi t)|\ \mathrm{d}t}_{=\frac{2}{\pi}} = \frac{2}{\pi}\left(\lfloor x \rfloor - 1\right).$$

On a donc bien :

$$\boxed{\int_1^x |\sin(2\pi t)|\ \mathrm{d}t \geq \frac{2}{\pi}\left(\lfloor x \rfloor - 1\right).}$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\pi}(\lfloor x \rfloor - 1) = +\infty$ de sorte que :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x |\sin(2\pi t)|\ \mathrm{d}t = +\infty.$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \quad \text{et} \quad f \notin \mathcal{L}^1([1;+\infty[).}$$

*Attention : f n'étant pas monotone, nous ne pouvons pas appliquer le résultat obtenu en **Q7**. Et ça tombe bien car le but de cette partie est de construire des contre-exemples !*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n) = |\sin(2\pi n)| = 0$ donc :

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} f(n) \text{ converge.}}$$

On a donc construit une fonction f continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\sum\limits_{n \geq 1} f(n)$ converge mais $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. L'hypothèse de monotonie est donc nécessaire dans le critère de comparaison série-intégrale.

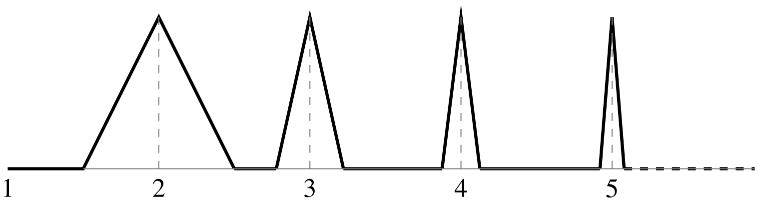
Q12. *Attention : La construction proposée par l'énoncé pose problème car il y a une superposition des triangles basés en 1 et en 2. Nous allons donc l'ajuster légèrement afin d'éviter cette superposition.*

Soit $n \geq 2$. Si on pose $a_n = \frac{2}{n^2}$, alors le triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1 a une aire égale à

$$\frac{2a_n \times 1}{2} = \frac{1}{n^2}.$$

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

En posant $f(t) = 0$ si $t \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$, l'allure de la fonction est la suivante :



On observe que cette fonction est continue et positive par construction. En outre,

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-a_n}^{n+a_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

de sorte que f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Pour autant, pour tout $n \geq 2$, $f(n) = 1$ de sorte que $\sum\limits_{n\geq 1} f(n)$ diverge grossièrement.

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est continue, positive et intégrable sur } [1, +\infty[\text{ mais } \sum_{n\geq 1} f(n) \text{ diverge.}}$$

*** Fin du sujet ***

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.