CCINP - MP 2025 - Mathématiques 2

Éléments de correction

Exercice 1

Q1.

```python
def degreMax(d : dict) -> int:
    return max([len(d[s]) for s in d])
```

Q2.

```python
def GrapheInv(d:dict) -> dict:
    D = {s:[] for s in d}
    for s in d:
        for i in d[s]:
            D[i].append(s)
    return D
```

Q3.

```python
def ColorationValide(d : dict, L : list) -> bool:
    for s in d:
        for i in d[s]:
            if L[i]==L[s]:
                return False
    return True
```

Q4. Le graphe étant orienté, chaque arête est parcourue exactement une fois par l'algorithme précédent et il déclenche une comparaison pour chacune d'entre elle. Si on note M le nombre d'arêtes, la complexité est donc constante égale à M ; est est donc en $O(M)$ dans le pire des cas.

Si on ne considère que des graphes simples, on a au plus $N(N-1)$ arêtes, qui correspondent aux couples (i, j) de sommets distincts. L'algorithme est donc en $O(N^2)$, indépendamment du nombre d'arêtes.

Q5.

```sql
SELECT MAX(duree) FROM LOCATIONS;
```

Q6.

```sql
SELECT F.codefilm, F.nomfilm, AVG(L.duree) AS moyenne_duree
FROM FILMS F
JOIN LOCATIONS L ON F.codefilm = L.codefilm
GROUP BY F.codefilm, F.nomfilm
HAVING AVG(L.duree) < 2
ORDER BY moyenne_duree DESC;
```

Exercice 2

Q7. On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ que P_n est de degré n et de coefficient dominant égal à 2^{n-1}.

Initialisation :

$P_1 = X$ est de degré 1 et de coefficient dominant égal à $1 = 2^{1-1}$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
$P_2 = 2X^2 - 1$ est de degré 2 et de coefficient dominant égal à $2 = 2^{2-1}$ donc la propriété est vraie pour $n = 2$.
Hérédité : Soit $n \geq 2$ tel que P_k est de degré k et de coefficient dominant égal à 2^{k-1} pour tout $k \in [\![n-1; n]\!]$. Alors

$$\deg(P_{n+1}) = \deg(2XP_n - P_{n-1}) = \max\left(\deg(2XP_n), \deg(P_{n-1})\right) = \deg(P_n) + 1 = n + 1.$$

En outre, si on note $\mathrm{cd}(P)$ le coefficient dominant d'un polynôme P, puisque $\deg(P_{n-1}) < \deg(2XP_n)$, on a :

$$\mathrm{cd}(P_{n+1}) = \mathrm{cd}(2XP_n) = 2\mathrm{cd}(P_n) = 2 \times 2^{n-1} = 2^n,$$

d'où l'hérédité.
En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \deg(P_n) = n \quad \text{et} \quad \mathrm{cd}(P_n) = 2^{n-1}.}$$

Q8. On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
Initialisation :
Pour $n = 0$, on a $P_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0 \times \theta)$.
Pour $n = 1$, on a $P_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$.
Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$, pour $k \in [\![n-1; n]\!]$
Alors :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)P_n(\cos(\theta)) - P_{n-1}(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta)) - \cos((n-1)\theta) \\ &= 2\frac{\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta))}{2} - \cos((n-1)\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta), \end{aligned}$$

d'où l'hérédité.
En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).}$$

Q9. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $f : t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$. On a $f \in C^0(]-1; 1[, \mathbb{R})$ et

$$|f(t)| \underset{t \to 1}{\sim} \frac{|P(1)Q(1)|}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

or le changement de variable affine $u = 1 - t$ montre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{u^{1/2}}\,\mathrm{d}u$, qui converge d'après le critère de Riemann. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{|P(1)Q(1)|}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ converge et, par comparaison pour les fonctions positives, on a :

$$\int_0^1 \left|\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Le même raisonnement avec le changement de variable $u = 1 + t$ montre que

$$\int_{-1}^{0} \left| \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right| \mathrm{d}t \text{ converge.}$$

En conclusion :

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t \text{ converge (absolument).}}$$

Q10. $\langle -,- \rangle$ est symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, et bilinéaire par bilinéarité de la multiplication et linéarité de l'intégrale.

Montrons que $\langle -,- \rangle$ est définie positive. Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$, on a :

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}}_{\geq 0} \mathrm{d}t \geq 0$$

et, $t \mapsto \dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ étant continue positive sur $]-1;1[$, on a égalité si, et seulement si, $\dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0$, pour tout $t \in]-1;1[$. Mais dans ce cas, P s'annule sur tout l'intervalle $]-1;1[$ donc admet une infinité de racines, et donc P est le polynôme nul.

En conclusion :

$$\boxed{\langle -,- \rangle \text{ définit un produit scalaire sur } \mathbb{R}_k[X].}$$

Q11. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

On a :

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((n+m)+\theta) + \cos((n-m)\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

— Si $m \neq n$, on a $m + n \neq 0$ et $n - m \neq 0$ donc

$$\int_0^{\pi} \cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)\,\mathrm{d}\theta. = \left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m}\right]_0^{\pi} = 0.$$

— Si $m = n$.

— Si $m = n = 0$, alors

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta = \pi.$$

— Si $m = n > 0$, alors

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((n+m)+\theta) + 1\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} + \theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2,\quad \int_0^{\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\pi & \text{si } m=n=0\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } m=n>0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}}$$

Q12. Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$. On a

$$\langle P_m,P_n\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{P_m(t)P_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

L'application $\theta\mapsto\cos(\theta)$ étant une bijection C^1 décroissante de $[0,\pi]$ vers $[-1,1]$, on peut effectuer le changement de variable $t=\cos\theta$ et il vient :

$$\langle P_m,P_n\rangle=\int_0^{\pi}P_m(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

et, d'après **Q8** et **Q11**, on a donc :

$$\langle P_m,P_n\rangle=\int_0^{\pi}\cos(m\theta)\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\pi & \text{si } m=n=0\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } m=n>0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Puisque $\deg(P_j)=j$ pour tout j, la famille $(P_j)_{0\le j\le k}$ est orthogonale dans $\mathbb{R}_k[X]$ pour le produit scalaire défini à la question **Q10**.
On a

$$\|P_0\|=\sqrt{\langle P_0,P_0\rangle}=\sqrt{\pi}$$

donc on pose

$$\boxed{E_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}P_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\|P_n\|=\sqrt{\langle P_n,P_n\rangle}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

donc on pose

$$\boxed{E_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}P_n.}$$

Alors $(E_0,\dots,E_k)$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$. Elle est donc libre et, par dimension, c'est une base.
En conclusion :

$$\boxed{(E_0,\dots,E_k)\text{ est une base orthonormale de }\mathbb{R}_k[X].}$$

Remarque

Les polynômes P_n étudiés dans cet exercice sont classiques et s'appellent *polynômes de Tchebychev de première espèce*. Ils jouent un rôle dans de nombreuses branches des mathématiques, voir par exemple https://fr.wikipedia.org/wiki/Polynôme_de_Tchebychev.

Problème : Matrices de rang 1

Partie I - Exemples

Q13. On observe que

$$M = \left[X_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, X_2 \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \dots, X_n \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \right]$$

de sorte que, pour tout $\omega \in \Omega$, les colonnes de $M(\omega)$ sont dans $\operatorname{Vect}\begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$ et donc $\operatorname{rg}(M(\omega)) \leq 1$. Puisque le rang est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $Y(\omega) = \operatorname{rg}(M(\omega)) \in \{0, 1\}$ et donc :

$$\boxed{Y(\Omega) \subset \{0, 1\}\,.}$$

Par ailleurs, $Y(\omega) = 0$ si, et seulement si $\begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$ est le vecteur nul et donc, les X_i étant des vaiid de loi $\mathcal{B}(p)$, on a :

$$\mathbf{P}\,(Y = 0) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = 0]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\,(X_i = 0) = (1 - p)^n$$

donc

$$\boxed{\mathbf{P}\,(Y = 1) = 1 - (1 - p)^n.}$$

En conclusion, on a :

$$\boxed{Y \sim \mathcal{B}\left(1 - (1 - p)^n\right).}$$

Q14. On a $\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ mais chaque X_i est de Bernoulli donc $X_i^2 = X_i$ de sorte que $\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Les X_i étant des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, on sait alors que :

$$\boxed{\operatorname{tr}(M) \sim \mathcal{B}(n, p).}$$

Q15. On a

$$M^2 = (UU^\top)(UU^\top) = U(U^\top U)U^\top$$

mais $U^\top U = \sum_{i=1}^n X_i^2 = \mathrm{tr}(M)$ donc

$$M^2 = \mathrm{tr}(M)UU^\top = \mathrm{tr}(M)M.$$

On a donc bien :

$$\boxed{M^2 = \mathrm{tr}(M)M.}$$

Ainsi, l'événement «M est une matrice de projection» se réalise si, et seulement si, $[\mathrm{tr}(M) = 1]$ se réalise. Or, d'après **Q15**

$$\mathbf{P}(\mathrm{tr}(M) = 1) = npq^{n-1}.$$

Ainsi, si on note $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de projection, on a :

$$\boxed{\mathbf{P}(M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = npq^{n-1}.}$$

Q16. L'événement «M est une matrice de projection» se réalise encore si, et seulement si, $[\mathrm{tr}(M) = 1]$ se réalise et on a toujours la relation $\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Les X_i étant ici de Poisson, les X_i^2 sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ de sorte que $\sum_{i=1}^n X_i^2 = 1$ si, et seulement si, exactement l'une des X_i prend la valeur 1, les autres prenant la valeur 0.

Ainsi, si on note $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de projection, par σ-additivité et indépendance, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})) &= \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 = 1\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^n [X_i = 1] \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n [X_j = 0]\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\underbrace{\mathbf{P}(X_i = 1)}_{=\lambda e^{-\lambda}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n \underbrace{\mathbf{P}\big(X_j = 0\big)}_{=e^{-\lambda}}\right] \\
&= n\lambda e^{-n\lambda}.
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}(M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = n\lambda e^{-n\lambda}}$$

Q17. On a clairement

$$\boxed{\operatorname{rg}(J) = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(J) = n.}$$

Si on pose $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $JV = \begin{pmatrix} n \\ n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = nV$ de sorte que $n \in \operatorname{Sp}(J)$ et $V \in E_n(J)$.

Par ailleurs, si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $J(e_1 - e_i) = 0$ pour tout $i \in [\![2; n]\!]$ donc

$$\operatorname{Vect}(e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_n) \subset \ker(J) = E_0(J)$$

et, par dimension, on a donc :

$$E_0(J) = \operatorname{Vect}(e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_n).$$

Ainsi, si on pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alors

$$\boxed{P^{-1}JP = \operatorname{diag}(n, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ fois}})}$$

Q18. Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\operatorname{rg}(M) = 1$. Par ailleurs, $M^2 = 0_3$ et $M \neq 0_3$ donc le polynôme minimal μ_M de M est X^2, scindé mais pas à racines simples, de sorte que M n'est pas diagonalisable.

Partie II - Résultats généraux

Q19. Notons $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la première colonne non nulle de A. Puisque A est de rang 1, toutes ses colonnes sont dans $\operatorname{Vect}(C)$ donc, il existe $a_1, a_2, \dots, a_n$ réels tels que

$$A = (a_1 C | a_2 C | a_3 C | \cdots | a_n C)$$

et donc

$$A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on pose :

$$\boxed{L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.}$$

Q20. On a

$$LC = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{1=2}^{n} a_i c_i.$$

On observe alors que

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} [a_i C]_{i,1} = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$$

de sorte que

$$\boxed{LC = \mathrm{tr}(A).}$$

Alors, par associativité du produit matriciel, il suit de **Q19** que :

$$A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = \mathrm{tr}(A)CL = \mathrm{tr}(A)A.$$

On a donc bien :

$$\boxed{A^2 = \mathrm{tr}(A)A.}$$

Q21. On sait que $\mathrm{rg}(A) = 1$ donc, d'après le théorème du rang, $\dim E_0(A) = \dim\ker(A) = n-1$. Il s'ensuit que la multiplicité algébrique de 0 est supérieure ou égale à $n-1$ et donc que X^{n-1} divise χ_A. Puisque $\deg(\chi_A) = n$, il existe un réel α tel que

$$\chi_A = X^{n-1}(X-\alpha) = X^n - \alpha X^{n-1}.$$

Par ailleurs, on sait que le coefficient en degré $n-1$ de χ_A est égal à $-\mathrm{tr}(A)$ donc $\alpha = \mathrm{tr}(A)$ et :

$$\boxed{\chi_A = X^{n-1}(X - \mathrm{tr}(A)).}$$

D'autre part, il suit de **Q20** que $X^2 - \mathrm{tr}(A)X$ annule A donc μ_A divise $X(X - \mathrm{tr}(A))$. Puisque A est de rang 1, elle est non nulle et donc $\mu_A \neq X$. D'autre part, puisque A est de rang 1 et que $n \geq 2$, $A \neq \mathrm{tr}(A)I_n$ donc $\mu_A \neq (X - \mathrm{tr}(A))$. Il s'ensuit que :

$$\boxed{\mu_A = X(X - \mathrm{tr}(A)).}$$

Q22. D'après **Q21**, on a $\mu_A = X(X - \mathrm{tr}(A))$. Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisable} &\Leftrightarrow \mu_A \text{ scindé à racines simples} \\ &\Leftrightarrow X(X - \mathrm{tr}(A)) \text{ scindé à racines simples} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{tr}(A) \neq 0. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{A \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow \operatorname{tr}(A) \neq 0.}$$

Q23. Si $\operatorname{im}(u) \cap \ker(u) \neq \{0\}$, alors $\operatorname{im}(u) \cap \ker(u)$ est un sous-espace vectoriel non trivial de $\operatorname{im}(u)$, mais $\operatorname{im}(u)$ est de dimension 1 donc $\operatorname{im}(u) \cap \ker(u) = \operatorname{im}(u)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\operatorname{im}(u) \subset \ker(u).}$$

Soit alors e_2 un vecteur non nul de $\operatorname{im}(u)$ et $e_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $u(e_1) = e_2$. La famille (e_1, e_2) est libre car e_2 est dans $\ker(u)$ et e_1 ne l'est pas. Soit G le supplémentaire de $\mathbb{R}e_2$ dans $\operatorname{im}(u)$ et soit $\mathcal{B}_G = (e_3, \dots, e_n)$ une base de G. Alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0_{2,n-2} \\ 1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0_{n-2,2}} & 0_{n-2} \end{array}\right)}$$

Q24. Si $\operatorname{im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$ alors, d'après le théorème du rang, on a :

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{im}(u) \oplus \ker(u).$$

Considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ adaptée à cette décomposition. Puisque $u(e_1) \in \operatorname{im}(u) = \operatorname{Vect}(e_1)$, il existe un réel α non nul tel que $u(e_1) = \alpha e_1$ de sorte que

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0_{1,n-1} \\ \hline 0_{n-1,1} & 0_{n-1} \end{array}\right)}$$

On observe que dans ce cas $\operatorname{tr}(u) = \alpha \neq 0$.

Q25. Soient M et N deux matrices de rang 1 et notons u et v les endomorphismes canoniquement associés.
Si M et N sont semblables, alors on sait que $\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(N)$.
Réciproquement, supposons $\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(N)$.

- Si $\operatorname{tr}(M) = 0$, alors il suit de **Q24** que l'on ne peut avoir $\operatorname{im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$. Alors $\operatorname{im}(u) \cap \ker(u) \neq \{0\}$ et donc M est semblable à la forme normale trouvée en **Q23**. Le même raisonnement s'applique à N. Par transitivité de la relation de similitude, M et N sont semblables.
- Si $\operatorname{tr}(M) \neq 0$, alors il suit de **Q23** que l'on ne peut avoir $\operatorname{im}(u) \cap \ker(u) \neq \{0\}$. Alors $\operatorname{im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$ et donc M est semblable à la forme normale trouvée en **Q24**. Le même raisonnement s'applique à N. Par transitivité de la relation de similitude, M et N sont semblables.

En conclusion :

$$\boxed{\text{Deux matrices de rang 1 sont semblables si, et seulement si, elles ont même trace.}}$$

*** Fin du sujet ***