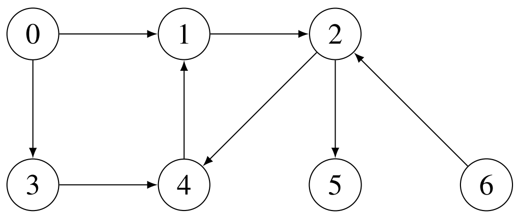
CCINP - MP 2025 - Mathématiques 2

Durée : 4h

Exercice 1

Hormis **Q3** et **Q4**, les questions de cet exercice sont indépendantes.
Dans cet exercice (informatique du tronc commun), les graphes ont leurs sommets numérotés à partir de 0 et ils sont orientés. On les représente par un dictionnaire d'adjacence.
Par exemple, le graphe :



est représenté par le dictionnaire :

```
d = {0:[1,3], 1:[2], 2:[4,5], 3:[4], 4:[1], 5:[], 6:[2]}
```

Q1. Écrire en langage Python une fonction `degreMax(d : dict) -> int` qui reçoit en entrée un dictionnaire d'adjacence représentant un graphe orienté et renvoie le degré sortant maximal parmi tous les degrés sortants des sommets du graphe.

Si G est un graphe orienté, on appelle graphe inverse de G le graphe possédant les mêmes sommets ainsi que les mêmes arêtes mais en sens inverse par rapport à celles de G.

Q2. Représenter le graphe inverse du graphe orienté donné en introduction.
Écrire en langage Python une fonction `grapheInv(d : dict) -> dict` qui renvoie un dictionnaire d'adjacence du graphe inverse du graphe représenté par d.

On souhaite colorier notre graphe orienté. Les couleurs sont représentées par des entiers naturels. La coloration du graphe est modélisée par une liste `L` telle que `L[s]` est égale à la couleur attribuée au sommet `s`.
Deux sommets du graphe reliés par une arête ne doivent pas être de la même couleur (coloration du graphe valide).

Q3. Écrire en langage Python une fonction `colorationValide(d : dict, L : list) -> bool` qui renvoie `True` si la coloration `L` du graphe représenté par `d` est valide et `False` dans le cas contraire.

Q4. Donner la complexité dans le pire des cas de la fonction précédente en fonction du nombre N de sommets et du nombre M d'arêtes. Justifier votre réponse.

On considère deux tables : FILMS et LOCATIONS. La première contient des informations sur des films et la seconde des informations sur des locations de films par les clients.

La table FILMS contient les attributs suivants :

— codefilm : code d'un film (entier), clé primaire;

— nomfilm (chaîne de caractères).

La table LOCATIONS contient les attributs suivants :

— codecli : code du client (entier), clé primaire avec l'attribut codefilm;

— codefilm : code du film (entier), clé primaire avec l'attribut codecli;

— datedebut : date de début de la location (chaîne de caractères);

— duree : durée de la location (flottant).

Q5. Écrire une requête SQL permettant de connaître la plus grande durée de location parmi tous les films.

Q6. Écrire une requête SQL permettant d'extraire le code du film, le nom du film et la durée moyenne de location des films qui ont été en moyenne loués moins de 2 jours. Le résultat doit être classé dans l'ordre décroissant des durées moyennes de location.

Exercice 2

On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

Q7. Donner le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n.

Q8. Justifier que pour tout réel θ :

$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Q9. Justifier la convergence de cette intégrale.

Q10. Démontrer que $\langle -, -\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).

Q11. Calculer pour n et m entiers naturels, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Q12. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

Problème : matrices de rang 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre n et $M_{1,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes réelles d'ordre n.

Partie I - Exemples

On suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = U \times U^T = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & X_1X_3 & \cdots & X_1X_n \\ X_2X_1 & X_2^2 & X_2X_3 & \cdots & X_2X_n \\ X_3X_1 & X_3X_2 & X_3^2 & \cdots & X_3X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_nX_1 & X_nX_2 & X_nX_3 & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}$$

Q13. On pose $Y = \mathrm{rg}(M)$. Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^n$.

Q14. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\mathrm{Tr}(M)$.

Q15. Vérifier que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

Q16. Dans cette question, on suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la matrice aléatoire M comme ci-dessus. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

Q17. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner son rang et sa trace, puis la diagonaliser (on précisera une matrice de passage).

Q18. Donner (en le justifiant) une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable. Préciser sa trace.

Partie II - Résultats généraux

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang égal à 1.

Q19. On note $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la première colonne non nulle de A. Démontrer qu'il existe une matrice ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A = C \times L$.

Q20. Calculer le réel $L \times C$ et en déduire que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.

Q21. Déterminer le polynôme caractéristique de A ainsi que son polynôme minimal.

Q22. Établir que :

$$A \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(A) \neq 0$$

On note désormais u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

Q23. On suppose que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Justifier que $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$, puis qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Q24. On suppose que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un réel non nul.

Q25. Conclure que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

*** Fin du sujet ***