

Durée : 4h

Exercice 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. On se donne des réels strictement positifs notés x_1, \dots, x_n et on pose :

$$m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

On désigne par $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives d'ordre n .

Q1. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{m} - 1\right)$$

Q2. En déduire l'inégalité :

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

Q3. Établir que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Q4. Dans cette question, B désigne une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Démontrer l'inégalité :

$$(\det(B))^{1/n} \leq \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(B)$$

et établir que c'est une égalité si, et seulement si, $B \in \operatorname{Vect}(I_n)$.

Désormais $A = (a_{i,j})$ désigne une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Q5. Démontrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a : $a_{i,i} > 0$.

Q6. On pose $D = \operatorname{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}, \frac{1}{\sqrt{a_{2,2}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{n,n}}}\right)$ et $B = DAD$.

Démontrer que $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et en déduire que :

$$\det(A) \leq a_{1,1} \times a_{2,2} \times \dots \times a_{n,n}$$

avec égalité si, et seulement si, A est diagonale.

Exercice 2

On définit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

Q7. Donner le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n .

Q8. Justifier que pour tout réel θ :

$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Q9. Justifier la convergence de cette intégrale.

Q10. Démontrer que $\langle -, - \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).

Q11. Calculer pour n et m entiers naturels, $\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta$.

Q12. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

Problème : matrices de rang 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n , $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes réelles d'ordre n .

Partie I - Exemples

On suppose que X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = U \times U^T = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1 X_2 & X_1 X_3 & \cdots & X_1 X_n \\ X_2 X_1 & X_2^2 & X_2 X_3 & \cdots & X_2 X_n \\ X_3 X_1 & X_3 X_2 & X_3^2 & \cdots & X_3 X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n X_1 & X_n X_2 & X_n X_3 & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}$$

Q13. On pose $Y = \text{rg}(M)$. Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1 - p)^n$.

Q14. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\text{Tr}(M)$.

Q15. Vérifier que $M^2 = \text{Tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

Q16. Dans cette question, on suppose que X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la matrice aléatoire M comme ci-dessus. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

Q17. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner son rang et sa trace, puis la diagonaliser (on précisera une matrice de passage).

Q18. Donner (en le justifiant) une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable. Préciser sa trace.

Partie II - Résultats généraux

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang égal à 1.

Q19. On note $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la première colonne non nulle de A . Démontrer qu'il existe une matrice ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A = C \times L$.

Q20. Calculer le réel $L \times C$ et en déduire que $A^2 = \text{Tr}(A)A$.

Q21. Déterminer le polynôme caractéristique de A ainsi que son polynôme minimal.

Q22. Établir que :

$$A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{Tr}(A) \neq 0$$

On note désormais u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A .

Q23. On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Justifier que $\text{Im}(u) \subseteq \text{Ker}(u)$, puis qu'il existe une base de \mathbb{R}^n dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Q24. On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Démontrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^n dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un réel non nul.

Q25. Conclure que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

*** Fin du sujet ***