

Éléments de correction

Irrationalité de $\zeta(2)$

Notations Dans ce corrigé, on adopte les notations suivantes :

- $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers ;
- Si $b > 1$, on note $\log_b : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$ le logarithme en base b .

Partie A – Un encadrement de la fonction π **I – Calculs préliminaires**

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du **binôme de Newton**, on a :

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1} = 2 \times 4^n$$

mais, par symétrie des coefficients binomiaux, on a donc :

$$2 \times 4^n = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2 \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k} \geq \binom{2n+1}{n},$$

ce qui prouve la deuxième inégalité.

Pour la première, on fixe $p \in \llbracket n+2; 2n+1 \rrbracket$ et on observe que

$$n! \binom{2n+1}{n} = \prod_{k=n+2}^{2n+1} k$$

donc p divise $n! \binom{2n+1}{n}$. Mais p est premier et $p \geq n+2 > n$ donc p ne divise pas $n!$; il suit du **lemme d'Euclide** que p divise $\binom{2n+1}{n}$. Les nombres premiers de $\llbracket n+2; 2n+1 \rrbracket$ étant premiers entre eux, il vient :

$$\prod_{\substack{n+2 \leq p \leq 2n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \text{ divise } \binom{2n+1}{n}$$

et donc

$$\prod_{\substack{n+2 \leq p \leq 2n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq \binom{2n+1}{n}.$$

En conclusion :

$$\prod_{\substack{n+2 \leq p \leq 2n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq \binom{2n+1}{n} \leq 4^n.$$

Q2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\pi_n = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p$.

On montre que $\pi_n < 4^n$ par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Si $n = 1$, $\pi_1 = 1 < 4$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\pi_k < 4^k$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

— Si n est impair, alors $n + 1$ est pair donc :

$$\pi_{n+1} = \pi_n < 4^n < 4^{n+1}.$$

— Si n est pair, on écrit $n = 2k$ et on a :

$$\pi_{n+1} = \pi_{2k+1} = \pi_{k+1} \times \prod_{\substack{k+2 \leq p \leq 2k+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p$$

et donc, d'après l'hypothèse de récurrence et la question **Q1**, on a :

$$\pi_{n+1} < 4^{k+1} \times 4^k = 4^{2k+1} = 4^{n+1},$$

d'où l'hérédité.

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p < 4^n.$$

Q3. Soit $x \geq 1$. Puisque $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$, on a :

$$\{p \in \mathcal{P} \mid p \leq x\} = \{p \in \mathcal{P} \mid p \leq \lfloor x \rfloor\}$$

donc, avec la question **Q2**,

$$\prod_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathcal{P}}} p = \prod_{\substack{p \leq \lfloor x \rfloor \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^{\lfloor x \rfloor} \leq 4^x.$$

On a donc bien :

$$\forall x \geq 1, \quad \prod_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^x.$$

Q4. D'après le **binôme de Newton**, on a :

$$\binom{2n}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n} = 4^n,$$

d'où la deuxième inégalité.

On montre la première inégalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a :

$$\binom{2n}{n} = \binom{2}{1} = 2 \geq \frac{4^1}{2 \times 1}.$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$. Alors

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n}$$

donc, par hypothèse de récurrence,

$$\binom{2(n+1)}{n+1} \geq \frac{2(2n+1)}{n+1} \times \frac{4^n}{2n}$$

mais

$$\begin{aligned} \frac{2(2n+1)}{n+1} \times \frac{4^n}{2n} &\geq \frac{4^{n+1}}{2(n+1)} \Leftrightarrow \frac{4n+2}{n} \geq 4 \\ &\Leftrightarrow 4n+2 \geq 4n, \end{aligned}$$

d'où l'hérédité.

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n.$$

Q5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $D_k = \llbracket 1; n \rrbracket \cap p^k \mathbb{Z}$, l'ensemble des multiples de p^k qui sont entre 1 et n .

On a

$$D_k = \{p^k q \mid 1 \leq p^k q \leq n\} = \left\{p^k q \mid 1 \leq q \leq \frac{n}{p^k}\right\} = \left\{p^k q \mid q \in \left[\left[1; \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor\right]\right]\right\}$$

donc $\text{card}(D_k) = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

Puisque $D_{k+1} \subset D_k$, on a

$$\text{card}(D_k \setminus D_{k+1}) = \text{card}(D_k) - \text{card}(D_{k+1}) = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor.$$

Par définition, pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ non nuls, on a $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. D'autre part, en partitionnant les entiers de 1 à n en fonction de leur valuation p -adique, on a :

$$\llbracket 1; n \rrbracket = \bigsqcup_{k=1}^q (D_k \setminus D_{k+1})$$

donc

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{i=1}^n v_p(i) = \sum_{k=1}^q \left[\sum_{i \in D_k \setminus D_{k+1}} v_p(i) \right] = \sum_{k=1}^q \left[\sum_{i \in D_k \setminus D_{k+1}} k \right] \\ &= \sum_{k=1}^q \text{card}(D_k \setminus D_{k+1}) \times k = \sum_{k=1}^q k \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right). \end{aligned}$$

En séparant les sommes dans l'égalité précédente, en effectuant un changement d'indices et en observant que $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$ si $k \geq q+1$, on obtient :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Remarque: Une formule classique

Cette formule est due à Legendre (1752-1833). On la retrouve dans des oraux de concours, ainsi que dans la première composition d'agrégation interne 2023.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que p^k divise $\binom{2n}{n}$. Alors $k \leq v_p\left(\binom{2n}{n}\right)$. Mais,

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = v_p\left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right) = v_p((2n)!) - 2v_p(n!)$$

donc, d'après la question **Q5** :

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \underbrace{\left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor}_{=c_i}.$$

Or, pour tout $i \geq 1$, en utilisant la relation $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, on a :

$$c_i < \frac{2n}{p^i} - 2\left(\frac{n}{p^i} - 1\right) = 2$$

et c_i est entier donc $c_i \leq 1$.

En outre, si $p^i > 2n$, alors $c_i = 0$. Mais

$$p^i > 2n \Leftrightarrow i > \log_p(2n)$$

de sorte que

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leq \sum_{i=1}^{\lfloor \log_p(2n) \rfloor} 1 \leq \lfloor \log_p(2n) \rfloor$$

et donc

$$p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)} \leq p^{\log_p(2n)} = 2n.$$

Ainsi, puisque $k \leq v_p\left(\binom{2n}{n}\right)$, on a :

$$p^k \leq 2n.$$

II – Majoration de $\pi(x)$

Q7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\{p \in \mathcal{P} \mid \sqrt{n} < p \leq n\} \subset \{p \in \mathcal{P} \mid p \leq n\}$$

et chaque nombre premier est supérieur à 1 donc :

$$\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ \sqrt{n} < p \leq n}} p \leq \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p.$$

Q8. Pour tout $p \in \{p \in \mathcal{P} \mid \sqrt{n} \leq p \leq n\}$, on a $p \geq \sqrt{n} = n^{1/2}$ et

$$\text{card}(\{p \in \mathcal{P} \mid \sqrt{n} < p \leq n\}) = \pi(n) - \pi(\sqrt{n})$$

donc

$$\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ \sqrt{n} < p \leq n}} p \geq \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ \sqrt{n} < p \leq n}} n^{1/2} \geq n^{(\pi(n) - \pi(\sqrt{n}))/2}.$$

D'autre part, il suit de **Q7** et **Q2** que :

$$\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ \sqrt{n} < p \leq n}} p \leq \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p < 4^n$$

donc :

$$n^{(\pi(n) - \pi(\sqrt{n}))/2} < 4^n.$$

Q9. Soit $n \geq 2$ entier. On a $\sqrt{n} \leq n$ donc

$$\{p \in \mathcal{P} \mid p \leq \sqrt{n}\} \leq \llbracket 1; \lfloor \sqrt{n} \rfloor \rrbracket$$

donc, en passant aux cardinaux :

$$\pi(\sqrt{n}) \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n}.$$

D'autre part, par positivité des termes, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \sqrt{n} < \frac{n}{\ln n} &\Leftrightarrow n < \frac{n^2}{\ln(n)^2} \\ &\Leftrightarrow n(\ln(n)^2 - n) < 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(n)^2 - n < 0 \end{aligned}$$

mais une étude de fonction élémentaire montre que $\ln(x)^2 < x$ pour tout $x \geq 1$, ce qui assure la dernière inégalité.

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow \pi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < \frac{n}{\ln n}.$$



Erreur d'énoncé : Pour la deuxième partie de la question, il y a une erreur d'énoncé, puisque $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors que $\pi(n)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Il semble clair que la question posée aurait dû consister à montrer que $\pi(n) \leq 4 \frac{n}{\ln(n)}$, ce que nous allons établir.

En passant au logarithme dans l'inégalité obtenue en **Q8**, on obtient :

$$\frac{\pi(n) - \pi(\sqrt{n})}{2} \ln(n) \leq \ln(4)n$$

donc

$$\pi(n) \leq 2 \ln(4) \frac{n}{\ln n} + \pi(\sqrt{n})$$

et donc, d'après la première partie de la question :

$$\pi(n) \leq 2 \ln(4) \frac{n}{\ln n} + \frac{n}{\ln n} = \frac{n}{\ln n} (1 + 2 \ln(4))$$

mais on sait que $\ln(2) \approx 0,69 < 0,7$ donc $2 \ln(4) = 4 \ln(2) < 2,8 < 3$ de sorte que $4 \ln(2) + 1 < 4$ et donc :

$$\pi(n) < 4 \frac{n}{\ln n}.$$

Q10. Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$. Elle est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x > 1, \quad f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$$

de sorte que f' est positive sur $[e, +\infty[$, ce qui justifie la croissance de f sur cet intervalle, et donc sur $[3, +\infty[$.

Soit $x \in [3, +\infty[$. On a $\lfloor x \rfloor \in [3, +\infty[$ et, d'après **Q9**,

$$\pi(x) = \pi(\lfloor x \rfloor) \leq 4 \frac{\lfloor x \rfloor}{\ln(\lfloor x \rfloor)} = 4 f(\lfloor x \rfloor) \leq 4 f(x) = 4 \frac{x}{\ln x}.$$

En conclusion :

$$\forall x \in [3, +\infty[, \quad \pi(x) \leq 4 \frac{x}{\ln x}.$$

III – Minoration de $\pi(x)$

Q11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **Q6**, tout diviseur premier p de $\binom{2n}{n}$ est inférieur ou égal à $2n$ donc on a la décomposition en facteurs premiers :

$$\binom{2n}{n} = \prod_{i=1}^{\pi(2n)} p_i^{v_{p_i}(\binom{2n}{n})}$$

mais, toujours d'après **Q6**, pour tout $i \in [1; \pi(2n)]$, on a $p_i^{v_{p_i}(\binom{2n}{n})} \leq 2n$ donc :

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{i=1}^{\pi(2n)} 2n = (2n)^{\pi(2n)}.$$

On a donc bien :

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)} &\Leftrightarrow 2n \ln(2) - \ln(2n) \geq n \ln(2) \\ &\Leftrightarrow n \ln(2) - \ln(2n) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(2^n) - \ln(2n) \geq 0 \end{aligned}$$

mais, une récurrence immédiate sur n montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2^n \geq 2n$$

donc la dernière inégalité est vérifiée et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)}.$$

En passant au logarithme dans l'inégalité obtenue en **Q11**, on obtient :

$$\pi(2n) \geq \frac{1}{\ln(2n)} \ln \left(\binom{2n}{n} \right)$$

mais, d'après **Q4**, on a $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$ donc :

$$\ln \left(\binom{2n}{n} \right) \geq \ln \left(\frac{4^n}{2n} \right) = 2n \ln(2) - \ln(2n)$$

de sorte que

$$\pi(2n) \geq \frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1$$

et, d'après la première partie de la question, on a bien :

$$\pi(2n) \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)}.$$

Q13. Posons $n = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$. On a donc les inégalités :

$$\frac{x}{2} - 1 < n \leq \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad x - 2 < 2n \leq x$$

donc $\pi(x) \geq \pi(2n)$ et, d'après la question **Q12**, on a ainsi :

$$\pi(x) \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)}$$

mais

$$n > \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow n \ln(2) > \left(\frac{x}{2} - 1 \right) \ln(2)$$

et

$$2n \leq x \Rightarrow \ln(2n) \leq \ln(x)$$

donc

$$\pi(x) > \frac{\ln(2)}{\ln(x)} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) = \frac{\ln(2)}{6} \frac{3x - 6}{\ln(x)}$$

or, pour tout $x \geq 3$, on a $3x - 6 \geq x$ donc :

$$\forall x \in [3, +\infty[, \quad \pi(x) \geq \frac{\ln(2)}{6} \frac{x}{\ln(x)}.$$

Partie B – Une majoration d'un PPCM

I – Une première majoration

Q14. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_r$ des entiers naturels non nuls. Pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $a_i\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ donc $\bigcap_{i=1}^r a_i\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$, comme intersection d'idéaux. Tous les idéaux de $\mathbb{Z}$ étant **principaux**, il existe un entier d tel que $\bigcap_{i=1}^r a_i\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. Si on suppose en outre que d est positif, alors d est unique. Ainsi :

$$\exists! d(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{N}, \quad \bigcap_{i=1}^r a_i\mathbb{Z} = d(a_1, \dots, a_r)\mathbb{Z}.$$

Q15. Montrons que $d(a_1, \dots, a_r)$ est divisible par chacun des a_i . Soit $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on a

$$d(a_1, \dots, a_r) \in d(a_1, \dots, a_r)\mathbb{Z} = \bigcap_{j=1}^r a_j\mathbb{Z} \subset a_i\mathbb{Z}$$

donc $a_i | d(a_1, \dots, a_r)$.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que a_i divise d pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$. Alors $d \in \bigcap_{i=1}^r a_i\mathbb{Z} = d(a_1, \dots, a_r)\mathbb{Z}$ de sorte que $d(a_1, \dots, a_r) | d$. Il s'ensuit que $d(a_1, \dots, a_r) \leq d$.

En conclusion :

$d(a_1, \dots, a_r)$ est le plus petit entier naturel non nul qui est divisible par $a_1, \dots, a_r$.

Q16. On a

$$d_2 = \text{PPCM}(1, 2) = 2$$

$$d_3 = \text{PPCM}(1, 2, 3) = 6$$

$$d_4 = \text{PPCM}(1, 2, 3, 4) = 12.$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

de sorte que $n!$ est divisible par chacun des $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et donc, d'après **Q15** :

$$d_n \leq n!$$

II – Une majoration plus fine

Q17. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On a

$$k = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p^{v_p(k)}$$

mais, pour tout $p \in \mathcal{P}$ tel que $p \leq n$, $v_p(k) \leq k_p$ car $k \leq p^{v_p(k)} \leq n$. Ainsi $\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p^{v_p(k)}$ divise $\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p^{k_p}$ et $\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p^{k_p}$ est

divisible par chacun des entiers de 1 à n .

D'autre part, pour tout $p \in \mathcal{P}$, $p^{k_p} \in \llbracket 1; n \rrbracket$ donc p^{k_p} divise d_n et donc $\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p^{k_p}$ divise d_n . En particulier,

$$\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p^{k_p} \leq d_n.$$

Or, d'après **Q15**, d_n est le plus petit entier naturel non nul divisible par chacun des entiers de 1 à n . Il s'ensuit que :

$$d_n = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p^{k_p}.$$

Q18. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathcal{P}$. On a :

$$p^k \leq k \Leftrightarrow k \leq \log_p(n)$$

de sorte que

$$k_p = \max \{k \in \mathbb{N} \mid p^k \leq n\} = \max \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq \log_p(n)\} = \lfloor \log_p(n) \rfloor.$$

Ainsi :

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad k_p = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor.$$

Alors :

$$d_n = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p^{k_p} = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p^{\lfloor \log_p(n) \rfloor} \leq \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p^{\log_p(n)} = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} n = n^{\pi(n)}.$$

En conclusion :

$$d_n \leq n^{\pi(n)}.$$

Q19. D'après le **théorème des nombres premiers**,

$$\pi(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$$

donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_\epsilon$, on a :

$$\pi(n) \leq (1 + \epsilon) \frac{n}{\ln(n)}$$

mais alors, il suit de **Q18** que, pour $n \geq N_\epsilon$:

$$d_n \leq n^{\pi(n)} \leq n^{(1+\epsilon) \frac{n}{\ln(n)}}$$

mais

$$n^{(1+\epsilon) \frac{n}{\ln(n)}} = \exp\left((1 + \epsilon) \frac{n}{\ln(n)} \ln(n)\right) = \exp((1 + \epsilon)n).$$

Alors en posant $\epsilon = \ln(3) - 1 > 0$, il vient :

$$d_n \leq \exp(n \ln(3)) = 3^n.$$

En conclusion :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow d_n \leq 3^n.$$

Partie C – Un critère d’irrationalité

Q20. Par l’absurde, supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$ et posons $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{|pq_n - qp_n|}{qq_n}$$

mais $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|_{n \rightarrow +\infty} = o\left(\frac{1}{q_n}\right)$ de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|pq_n - qp_n|}{q} = 0$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |pq_n - qp_n| = 0.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $pq_n - qp_n \in \mathbb{Z}$ de sorte que la suite $(pq_n - qp_n)_n$ est une suite d’entiers qui converge vers 0 ; elle est donc stationnaire nulle. Alors il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $pq_n = qp_n$, c’est-à-dire $\frac{p_n}{q_n} = \alpha$, une contradiction.

En conclusion :

α est irrationnel.

Q21. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq 10^{k!} \leq 10^k = \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

et la série $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ est une série géométrique convergente donc, par comparaison $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{10^{k!}}$ converge et

$$\beta = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}} \text{ est bien défini.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{k!}}.$$

Puisque $10^{k!} | 10^{n!}$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on peut écrire

$$S_n = \frac{p_n}{10^{n!}},$$

avec $p_n \in \mathbb{Z}$.

Alors

$$|\beta - S_n| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!-(n+1)!}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{10^{(n+1)!}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{10^{n!}}\right).$$

En outre $\beta - S_n > 0$ donc, d’après la question **Q20** :

$$\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Q22. La série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ est une **série de Riemann** convergente donc

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ est bien défini.}$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, k divise d_n donc k^2 divise d_n^2 de sorte que

$$p_n = d_n^2 S_n = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{d_n^2}{k^2}}_{\in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{N}^*$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{p_n}{d_n^2},$$

avec $p_n \in \mathbb{N}^*$.

Q23. Pour appliquer le critère de **Q20**, il faut que

$$|\zeta(2) - S_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{d_n^2}\right).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|\zeta(2) - S_n| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Pour appliquer le critère de **Q20**, il faudrait donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n^2}{n+1} = 0$$

mais, par définition de $d_n = \text{PPCM}(1, 2, \dots, n)$, on a $d_n \geq n$ donc $d_n^2 \geq n^2$ de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n^2}{n+1} = +\infty$.

En conclusion :

le critère établi en **Q20** ne peut s'appliquer à cette expression de $\zeta(2)$.

Partie D – Calcul d'une intégrale double

I – Une intégrale double

Q24. Soit $y \in]0, 1[$. Pour tout $x \in [0, 1]$, $|xy| \leq |y| < 1$ donc $1 - xy \neq 0$. En outre, $r, s \geq 0$ donc $x \mapsto x^r y^s$ est continue sur $[0, 1]$. En conclusion $x \mapsto \frac{x^r y^s}{1 - xy}$ est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc :

$$x \mapsto \frac{x^r y^s}{1 - xy} \in \mathcal{L}^1([0; 1]).$$

Q25. Soit $y \in]0, 1[$. On a

$$f_{r,s}(y) = \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1 - xy} dx$$

et l'application $x \mapsto xy$ est une bijection croissante de $[0, 1]$ vers $[0, y]$ donc, le changement de variable $u = xy$ est licite et donne :

$$f_{r,s}(y) = y^{s-r-1} \underbrace{\int_0^y \frac{u^r}{1 - u} du}_{=F(y)}.$$

La fonction $u \mapsto \frac{u^r}{1 - u}$ étant continue sur $[0, y]$, le **théorème fondamental de l'analyse** assure que F est de classe C^1 sur $[0, 1]$. D'autre part, $y \mapsto y^{s-r-1}$ est continue sur $]0, 1]$ donc :

$$f_{r,s} \in C^0([0; 1]).$$

Montrons que $f_{r,s}$ est intégrable. Pour cela, nous allons déterminer des équivalents de $f_{r,s}(y) = y^{s-r-1} \int_0^y \frac{u^r}{1-u} du$ quand y tend vers 0^+ et 1^- à l'aide d'intégrations de relations de comparaison

En 0 : On a $\frac{u^r}{1-u} \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} u^r > 0$ et $\int_0^{1/2} u^r du$ converge donc, par **intégration des relations de comparaison** (cas convergent) :

$$f_{r,s}(y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y^{s-r-1} \int_0^y u^r du = \frac{y^s}{r+1}$$

de sorte que $\lim_{y \rightarrow 0^+} f_{r,s}(y) = 0$. Ainsi, $f_{r,s}$ est prolongeable par continuité en 0 et $\int_0^{1/2} f_{r,s}(y) dy$ converge.

En 1 : On a $\frac{u^r}{1-u} \underset{u \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{1-u} > 0$ et $\int_0^1 \frac{1}{1-u} du$ diverge donc, par **intégration des relations de comparaison** (cas divergent) :

$$f_{r,s}(y) \underset{y \rightarrow 1^-}{\sim} y^{s-r-1} \int_0^y \frac{1}{1-u} du = -y^{s-r-1} \ln(1-y) > 0$$

et $\int_0^{1/2} -y^{s-r-1} \ln(1-y) dy$ converge par croissances comparées donc, par comparaison $\int_{1/2}^1 f_{r,s}(y) dy$ converge.

La fonction $f_{r,s}$ étant positive sur $]0, 1[$, on a donc :

$$f_{r,s} \in \mathcal{L}^1([0; 1]).$$

Q26. Soit $y \in]0, 1[$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\frac{x^r y^s}{1-xy} = x^r y^s \sum_{k=0}^{+\infty} (xy)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} y^{s+k} x^{r+k}$$

et la convergence est normale en $x \in [0, 1]$ car le rayon de convergence de la série entière est $\frac{1}{y} > 1$. Ainsi, par **intégration terme à terme sur un segment** pour une série de fonction uniformément convergente, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} y^{s+k} x^{r+k} dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} y^{s+k} \int_0^1 x^{r+k} dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^{s+k}}{s+k+1}. \end{aligned}$$

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k : y \in [0, 1] \mapsto \frac{y^{s+k}}{s+k+1}$. Alors $g_k \in C^0([0, 1]) \subset \mathcal{L}^1([0, 1])$ et

$$\int_0^1 |g_k(y)| dy = \int_0^1 \frac{y^{s+k}}{s+k+1} dy = \frac{1}{(s+k+1)(r+k+1)} \leq \frac{1}{(k+1)^2}$$

et $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)^2}$ converge d'après le critère de Riemann donc la série $\sum_{k \geq 0} \int_0^1 |g_k(y)| dy$ converge. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur l'intervalle $]0, 1[$, on a :

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^{s+k}}{s+k+1} \right) dy = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(y) dy = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 g_k(y) dy,$$

c'est-à-dire :

$$J_{r,s} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(s+k+1)(r+k+1)}.$$

II – Une écriture sous forme de quotients

Q27. On considère la fraction rationnelle

$$F_{r,s}(X) = \frac{1}{(r+X+1)(s+X+1)} = \frac{1}{(X-(-s-1))(X-(-r-1))} \in \mathbb{R}(X).$$

Sa décomposition en éléments simples est de la forme :

$$F_{r,s}(X) = \frac{\alpha}{X-(-s-1)} + \frac{\beta}{X-(-r-1)}$$

et

$$\alpha = [(X-(s-1))F_{r,s}(X)]|_{X=s-1} = \frac{1}{r-s} \quad \text{et} \quad \beta = [(X-(r-1))F_{r,s}(X)]|_{X=r-1} = \frac{1}{s-r}$$

de sorte que

$$\frac{1}{(r+X+1)(s+X+1)} = \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{s+X+1} - \frac{1}{r+X+1} \right).$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, k n'est pas un pôle de la fraction rationnelle donc en évaluant en k , il vient :

$$\frac{1}{(r+k+1)(s+k+1)} = \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{s+k+1} - \frac{1}{r+k+1} \right).$$

Q28. En combinant **Q26** et **Q27**, il vient :

$$J_{r,s} = \frac{1}{r-s} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{s+k+1} - \frac{1}{r+k+1}.$$

Q29. Soit $N \in \mathbb{N}$. On effectue un télescope :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \frac{1}{s+k+1} - \frac{1}{r+k+1} &= \sum_{k=0}^N \frac{1}{s+k+1} - \sum_{k=0}^N \frac{1}{r+k+1} \\ &= \sum_{k=s+1}^{N+s+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=r+1}^{N+r+1} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=s+1}^r \frac{1}{k} - \sum_{k=N+s+2}^{N+r+1} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

mais

$$0 \leq \sum_{k=N+s+2}^{N+r+1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=N+s+2}^{N+r+1} \frac{1}{N+s+2} = \frac{r-s}{N+s+2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

donc, en faisant tendre N vers l'infini, il vient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{s+k+1} - \frac{1}{r+k+1} = \sum_{k=s+1}^r \frac{1}{k}.$$

En divisant par $r-s$, on a donc :

$$J_{r,s} = \frac{1}{r-s} \sum_{k=s+1}^r \frac{1}{k}.$$

Q30. En multipliant l'identité obtenue en **Q29** par d_r^2 , on a :

$$d_r^2 J_{r,s} = \sum_{k=s+1}^r \frac{d_r^2}{k(r-s)}$$

mais, pour tout $k \in [s+1; r] \subset [1; r]$, k divise d_r . D'autre part, $r-s < r$ donc $r-s$ divise d_r de sorte que $k(r-s)$ divise d_r^2 . Ainsi :

$$J_{r,s} = \frac{1}{d_r^2} \sum_{k=s+1}^r \underbrace{\frac{d_r^2}{k(r-s)}}_{=p_{r,s} \in \mathbb{N}}$$

donc on a bien :

$$J_{r,s} = \frac{p_{r,s}}{q_{r,s}}, \quad \text{avec } p_{r,s} \in \mathbb{N} \text{ et } q_{r,s} \in d_r^2 \mathbb{N}.$$

Partie E – Une démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$

Q31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la **formule de Leibniz**, on a :

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [X^n]^{(k)} [(1-X)^n]^{(n-k)}$$

mais, pour tout $k \in [0; n]$, on a :

$$[X^n]^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} \quad \text{et} \quad [(1-X)^n]^{(k)} = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} (1-X)^{n-k}$$

donc

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{k!} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k}^2 X^k (1-X)^{n-k} \end{aligned}$$

de sorte que P_n est à coefficients entiers de degré inférieur ou égal à n .

En outre, d'après le **binôme de Newton**, le coefficient de X^n dans $P_n(X)$ est :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k}^2 (-1)^k = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 > 0$$

donc :

P_n est polynomiale de degré n et à coefficients entiers.

Q32. Pour tout $y \in]0, 1[$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$(1-y)^n P_n(x) = \left(\sum_{s=0}^n b_s y^s \right) \left(\sum_{r=0}^n a_r x^r \right) = \sum_{0 \leq r, s \leq n} a_r b_s x^r y^s$$

donc, par **linéarité** pour les intégrales convergentes, il suit de **Q24** et **Q25** (les arguments fonctionnent pour n'importe quels $r, s \in \mathbb{N}$) que :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dx dy \text{ existe.}$$

En outre, toujours par **linéarité**, on a :

$$I_n = \sum_{0 \leq r, s \leq n} a_r b_s J_{r,s} = \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s J_{r,s} + \sum_{r=0}^n a_r b_r J_{r,r}.$$

On a donc bien :

$$I_n = \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} a_r b_s J_{r,s} + \sum_{r=0}^n a_r b_r J_{r,r}.$$

Q33. On commence par observer que l'argument pour établir l'identité en **Q26** fonctionne pour $r = s = 0$ donc

$$J_{0,0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2).$$

Alors, il suit de **Q30** et du résultat admis à la fin de la partie D que :

$$I_n = \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq n \\ r \neq s}} \underbrace{a_r b_s}_{\in \mathbb{Z}} \frac{p_{r,s}}{q_{r,s}} + \sum_{r=0}^n \underbrace{a_r b_r}_{\in \mathbb{Z}} \left(\zeta(2) - \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2} \right)$$

où chaque $q_{r,s}$ divise d_r^2 donc d_n^2 et, d'après **Q22**, $\sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2} = \frac{p'_r}{q'_r}$ où $q'_r = d_r^2$ divise d_n^2 . En prenant d_n^2 pour dénominateur commun, on peut donc écrire :

$$I_n = \frac{p_n + \zeta(2)q_n}{d_n^2},$$

avec p_n, q_n entiers relatifs.

Q34. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in]0, 1[$. En effectuant une **intégration par parties**, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx &= \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \times \frac{d^n}{dx^n} [x^n(1-x)^n] dx \\ &= \left[\frac{1}{1-xy} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [x^n(1-x)^n] \right]_0^1 - y \int_0^1 \frac{1}{(1-xy)^2} \times \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [x^n(1-x)^n] dx \end{aligned}$$

mais 0 et 1 étant des racines d'ordre n de $X^n(1-X)^n$, elles sont encore racines de $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [x^n(1-x)^n]$ de sorte que

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx = -y \int_0^1 \frac{1}{(1-xy)^2} \times \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [x^n(1-x)^n] dx.$$

En faisant ainsi n **intégrations par parties successives**, il vient :

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx = (-y)^n \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx.$$

Q35. En injectant dans l'expression de I_n , on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-y)^n \left(\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 (1-y)^n (-y)^n \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx dy \\ &= (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^n (1-y)^n x^n (1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx dy. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^n (1-y)^n x^n (1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx dy.$$

Q36. Note : certains calculs ici ont été faits à la calculatrice ; il y avait peut-être plus astucieux et moins calculatoire...

On pose $U =]0, 1[^2$ et on considère

$$f : (x, y) \in U \mapsto \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy}$$

qui est de classe C^2 comme quotient de fonctions de classe C^2 .

Pour tout $(x, y) \in U$, on a :

$$\nabla(f)(x, y) = \left(\frac{y(1-y)(x^2y - 2x + 1)}{(1-xy)^2}, \frac{x(1-x)(y^2x - 2y + 1)}{(1-xy)^2} \right)$$

de sorte que

$$\nabla(f)(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$$

donc f présente un **unique point critique** sur U .

On a alors (*idem*)

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-2} & \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-3} \\ \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-3} & \frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-2} \end{pmatrix}$$

qui est de déterminant $5-2\sqrt{5} > 0$ et de trace $2\sqrt{5}-6 < 0$ donc f présente un **maximum local** en $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$.

On observe maintenant que

$$f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{5}-11}{2}.$$

Enfin, on peut prolonger f par continuité sur le compact $[0, 1]^2$ en posant $f(x, y) = 0$ pour tout point (x, y) du bord de $[0, 1]^2$ et le **théorème des bornes atteintes** assure que ce prolongement admet un **maximum global** sur $[0, 1]^2$. Ce maximum ne peut pas être sur le bord car la restriction de f au bord est nulle ; il est donc dans $]0, 1[^2$, auquel cas l'étude sur l'ouvert assure qu'il se trouve en $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$.

En conclusion :

$$\forall (x, y) \in]0, 1[^2, \quad \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \leq \frac{5\sqrt{5}-11}{2}.$$

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après **Q35** et **Q36**, on a :

$$|I_n| \leq \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{1-xy} f(x, y)^n \right| dx dy$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n dx dy \\
&= \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n J_{0,0} \\
&= \zeta(2) \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$|I_n| \leq \zeta(2) \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n.$$

Q38. En reprenant les notations de **Q33**, on a :

$$|p_n + \zeta(2)q_n| = |d_n^2 I_n|$$

donc, d'après **Q37** et **Q19**, il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel :

$$|p_n + \zeta(2)q_n| \leq \zeta(2) \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right)^n \times 9^n$$

mais on a admis que $9 \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2} \right) \leq \frac{5}{6}$ donc, pour $n \geq N$, on a :

$$|p_n + \zeta(2)q_n| \leq \zeta(2) \left(\frac{5}{6} \right)^n.$$

D'autre part, $I_n > 0$ par stricte positivité de l'intégrande donc $d_n^2 I_n > 0$ et donc, on a bien :

$$0 < |p_n + \zeta(2)q_n| \leq \zeta(2) \left(\frac{5}{6} \right)^n.$$

Q39. L'inégalité obtenue en **Q38** montre que

$$\left| \frac{p_n}{q_n} + \zeta(2) \right|_{n \rightarrow +\infty} = o\left(\frac{1}{q_n} \right)$$

et pour tout n , $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ et $-\zeta(2) \neq \frac{p_n}{q_n}$. Alors, en appliquant le critère établi en **Q20**, $-\zeta(2)$ est irrationnel et donc :

$$\zeta(2) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Q40. Par l'absurde, si π est rationnel, alors puisque $\mathbb{Q}$ est un corps $\frac{\pi^2}{6}$ aussi. Or $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, ce qui contredit **Q39**.

En conclusion :

$$\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

*** Fin du corrigé ***