E3A - MP 2025

Éléments de correction

Exercice 1

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ car polynomiale. Pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\nabla(h)(u, v, w) = (4u - 4,\ 2v,\ 2w)\,.$$

Ainsi
$$\nabla(h)(u, v, w) = (0, 0, 0) \iff (u, v, w) = (1, 0, 0)$$
de sorte que h admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^3$ en $(1, 0, 0)$.
En outre, on a :
$$\nabla^2(h)(u, v, w) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$$
donc h présente un minimum local sur $\mathbb{R}^3$.
On a $h(1, 0, 0) = 2$ et, pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$h(u, v, w) - 2 = 2(u - 1)^2 + v^2 + w^2 \geq 0$$

de sorte que :

$$\boxed{h \text{ présente un minimum global en } (1, 0, 0).}$$

Enfin, h ne présente aucun maximum local sur $\mathbb{R}^3$ car elle admet un unique point critique, $(1, 0, 0)$, qui est un minimum. En conséquence, h n'admet pas de maximum global sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$.
Remarque : *Plus précisément, h n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^3$ puisque* $\lim\limits_{u\to+\infty} h(u, v, w) = +\infty$.

2. Soit $(x, y, z, t) \in H$. On a $x + y = 2$ donc

$$f(x, y, z, t) = f(x, 2 - x, z, t) = 2x^2 + z^2 + t^2 - 4x + 4 = h(x, z, t)$$

de sorte que, l'étude menée à la question **1** montre que :

$$\boxed{f \text{ présente un minimum global sous la contrainte } H \text{ en } (1, 1, 0, 0) \text{ où elle vaut } 2}$$

En outre,

$$\boxed{f \text{ ne présente aucun maximum sous la contrainte } H.}$$

3. Si on pose $g : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x + y - 2$, alors $H = g^{-1}(\{0\})$ est la ligne de niveau 0 de g. La fonction g est de classe C^1 car polynomiale et

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad \nabla(g)(x, y, z, t) = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$$

de sorte que dg ne s'annule pas sur H, il s'agit donc d'une contrainte non critique.
Supposons que f présente un extremum local sous la contrainte en $(x, y, z, t) \in H$. D'après le théorème d'optimisation sous contrainte, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\nabla(f)(x, y, z, t) = \lambda \nabla(g)(x, y, z, t),$$

c'est-à-dire :

$$(2x,\ 2y,\ 2z, ,\ 2t) = (\lambda,\ \lambda,\ 0,\ 0)$$

dont on déduit $x = y$ et $z = t = 0$. D'autre part, puisque $(x, y, z, t) \in H$, on a $x + y = 2$ donc $x = y = 1$.
Ainsi, f présente un unique point critique sous la contrainte H en $(1, 1, 0, 0)$ et :

$$\boxed{f \text{ ne peut présenter un extremum local sous la contrainte } H \text{ qu'en } (1, 1, 0, 0).}$$

4. On calcule $f(1, 1, 0, 0) = 2$ et on reprend le raisonnement de la question **3** pour conclure.

5. On observe que

$$F = Y^{\perp}$$

et l'orthogonal d'un vecteur (ou plus généralement d'une partie) dans un espace préhilbertien est un sous-espace vectoriel. En particulier :

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4.}$$

6. Puisque Vect(Y) est de dimension finie, on a :

$$F^{\perp} = (Y^{\perp})^{\perp} = (\mathrm{Vect}(Y)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect}(Y).$$

En conclusion :

$$\boxed{F^{\perp} = \mathrm{Vect}(Y).}$$

7. Si on note p_F la projection orthogonale sur F, on a $Y \in F^{\perp}$ donc $p_F(y) = 0$ de sorte que

$$d(Y, F) = \|Y - p_F(Y)\| = \|Y\| = \sqrt{2}.$$

En conclusion :

$$\boxed{d(Y, F) = \sqrt{2}.}$$

8. Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned} X + Y \in F &\Leftrightarrow (x-1,\ y-1,\ z,\ t) \in F \\ &\Leftrightarrow (x-1) + (y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y = 2 \\ &\Leftrightarrow X \in H. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{X \in H \ \Leftrightarrow\ X + Y \in F.}$$

9. Le résultat de la question précédente montre que :

$$\boxed{H \text{ est un sous-espace affine de } \mathbb{R}^4 \text{ de direction } F.}$$

10. On a, d'après l'expression de f et les questions **9** et **7** :

$$\begin{aligned} \inf_{X \in H} f(X) &= \inf_{X \in H} \|X\|^2 \\ &= \inf_{X+Y \in F} \|(X+Y) - Y\|^2 \\ &= \inf_{a \in F} \|a - Y\|^2 \\ &= d(Y, F)^2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

D'autre part, f n'est pas majorée sur H car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x, 2-x, 0, 0) \in H$ et

$$f(x, 2-x, 0, 0) = 2x^2 - 4x + 4 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

En conclusion :

$$\boxed{\min_{X \in H} f(X) = 2 \quad \text{et} \quad f \text{ n'est pas majorée sur } H.}$$

Exercice 2

1. Soit $m \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\sigma_m = \sum_{r=1}^{n} \omega^{m(r-1)} = \sum_{r=0}^{n-1} (\omega^m)^r .$$

— Si $\omega^m = 1$, c'est-à-dire si n divise m (puisque ω est d'ordre n dans $(\mathbb{U}, \times)$), alors $\sigma_m = n$.

— Sinon, on a :

$$\sigma_m = \frac{1-(\omega^m)^n}{1-\omega^m} = \frac{1-(\omega^n)^m}{1-\omega^m} = \frac{1-1^m}{1-\omega^m} = 0.$$

En conclusion :

$$\boxed{\sigma_m = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ divise } m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

2. Dans le cas où $n = 3$, on a $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$ donc

$$\begin{aligned} \varphi_j(1) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + X + X^2\right) \\ \varphi_j(X) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + jX + j^2X^2\right) \\ \varphi_j(X^2) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + j^2X + jX^2\right) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_j) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.}$$

3. Pour tout $\ell \in [\![0; n-1]\!]$, on a :

$$\varphi_\omega(X^\ell) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k)^\ell X^k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k\ell} X^k$$

et, pour tout $(k, \ell) \in [\![1; n]\!]$, $a_{k,\ell}$ est le coefficient de X^{k-1} dans $\varphi_\omega(X^{\ell-1})$. Ainsi :

$$\boxed{a_{k,\ell} = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(k-1)(\ell-1)}.}$$

4. Pour tout $(k, \ell) \in [\![1; n]\!]^2$, on a

$$a_{k,\ell} = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(k-1)(\ell-1)} = a_{\ell,k}$$

donc :

$$\boxed{A_\omega \text{ est symétrique dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

Les coefficients de A_ω étant complexes, le théorème spectral ne s'applique pas donc :

$$\boxed{\text{On ne peut pas conclure à ce stade quant à la diagonalisabilité de } A_\omega.}$$

5. Pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, il suit de **3** que :

$$\begin{aligned} [A_\omega A_{\overline{\omega}}]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [A_\omega]_{i,k}[A_{\overline{\omega}}]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(i-1)(k-1)} \frac{1}{\sqrt{n}}\overline{\omega}^{(k-1)(j-1)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\omega^{(i-1)}\overline{\omega}^{(j-1)}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

— Si $i = j$, on a :

$$\left(\omega^{(i-1)}\overline{\omega}^{(i-1)}\right)^{k-1} = \left(\left(\underbrace{|\omega|^2}_{=1}\right)^{i-1}\right)^{k-1} = 1$$

de sorte que :

$$[A_\omega A_{\overline{\omega}}]_{i,i} = 1.$$

— Si $i > j$, on a :

$$\left(\omega^{(i-1)}\overline{\omega}^{(i-1)}\right)^{k-1} = \omega^{i-j}\left(\underbrace{\omega^{(j-1)}\overline{\omega}^{(j-1)}}_{=1}\right)^{k-1} = \omega^{i-j}$$

et il suit alors de la question **1** que

$$[A_\omega A_{\overline{\omega}}]_{i,j} = 0.$$

— De même, si $i < j$, on a :

$$\left(\omega^{(i-1)}\overline{\omega}^{(i-1)}\right)^{k-1} = \omega^{j-i}\left(\underbrace{\omega^{(i-1)}\overline{\omega}^{(i-1)}}_{=1}\right)^{k-1} = \omega^{j-i}$$

et en reprenant le raisonnement de la question **1**, il vient :

$$[A_\omega A_{\overline{\omega}}]_{i,j} = 0.$$

En conclusion :

$$\boxed{A_\omega A_{\overline{\omega}} = I_n.}$$

En particulier :

$$\boxed{A_\omega \text{ est inversible et } A_\omega^{-1} = A_{\overline{\omega}}.}$$

6. $A_\omega = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_\omega)$, $A_{\overline{\omega}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_{\overline{\omega}})$ et que $A_\omega^{-1} = A_{\overline{\omega}}$, donc φ_ω est inversible et :

$$\boxed{\varphi_\omega^{-1} = \varphi_{\overline{\omega}}.}$$

7. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$. Il suit de **3** et **1** que :

$$\begin{aligned}
[A_\omega^2]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(i-1)(k-1)}\frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(k-1)(j-1)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega^{(i-1)(k-1)+(k-1)(j-1)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega^{(k-1)(i+j-2)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\omega^{(i+j-2)}\right)^{k-1} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ divise } i+j-2 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}
\end{aligned}$$

mais $1 \leq i, j \leq n$ donc $0 \leq i+j-2 \leq 2n-2$ donc

$$n \text{ divise } i+j-2 \iff (i=j=1 \text{ ou } i = n+2-j)$$

de sorte que :

$$\boxed{A_\omega^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & 1 & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$$

Si on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A_ω^2 et que l'on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on observe que

$$u(e_1) = e_1 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![2;n]\!],\ u(e_i) = e_{n+2-i}$$

de sorte que

$$u^2(e_1) = e_1 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![2;n]\!],\ u^2(e_i) = e_{n+2-(n+2-i)} = e_i$$

et donc $u^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. En conséquence $(A_\omega^2)^2 = I_n$ et donc :

$$\boxed{A_\omega^4 = I_n.}$$

8. Il suit de la question **7** que $X^4 - 1$ annule A_ω mais

$$X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$$

est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ donc :

$$\boxed{A_\omega \text{ est diagonalisable.}}$$

9. $X^4 - 1$ annule A_ω donc $\mathrm{Sp}(\varphi_\omega) = \mathrm{Sp}(A_\omega) \subset \{-1, 1, -i, i\}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles pour } \varphi_\omega \text{ sont } -1,\ 1,\ -i \text{ et } i.}$$

Remarque : *On peut en outre remarquer à ce stade que, si $n \geq 3$, $A_\omega^2 \neq I_n$ donc $X^2 - 1$ n'annule pas A_ω. En particulier, le polynôme minimal de A_ω, qui est un diviseur de $X^4 - 1$ n'est pas un diviseur de $X^2 - 1$; il s'ensuit que le spectre de A_ω contient nécessairement i ou $-i$.*

10. Si on note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, on sait que :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \;\middle|\; 0 \leq k \leq n-1 \right\} = \left\{ \omega^k \;\middle|\; 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Les racines de } X^n - 1 \text{ sont les } \omega^k \text{ avec } k \in [\![0; n-1]\!].}$$

11. D'après **10**, on a :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$$

donc, pour tout $q \in [\![0; n-1]\!]$, on a :

$$L_q(X) = \frac{X^n - 1}{X - \omega^q} = \frac{1}{X - \omega^q} \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq q}}^{n-1} (X - \omega^k) \in \mathbb{C}_{n-1}[X].$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall q \in [\![0; n-1]\!]\,, \quad L_q(X) \in E_{n-1}.}$$

12. On a

$$\varphi_\omega(Q_0) = \varphi_\omega(1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} X^k = \frac{1}{\sqrt{n}} L_0 \in H_0$$

et donc

$$\varphi_\omega(L_0) = \varphi_\omega\left(\sqrt{n}\varphi_\omega(Q_0)\right) = \sqrt{n}\varphi_\omega^2(Q_0)$$

mais $\varphi_\omega^2(Q_0) = Q_0$ d'après **7** donc

$$\varphi_\omega(L_0) = \sqrt{n} Q_0 \in H_0.$$

Il s'ensuit que :

$$\boxed{\varphi(H_0) \subset H_0.}$$

13. D'après les relations

$$\varphi_\omega(Q_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} L_0 \quad \text{et} \quad \varphi_\omega(L_0) = \sqrt{n} Q_0$$

la matrice de la restriction de φ_ω à H_0 dans la base (Q_0, L_0) est :

$$\boxed{M_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \end{pmatrix}.}$$

14. On observe que

$$M_0 \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_0 \begin{pmatrix} -\sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si on considère un supplémentaire G_0 de H_0 dans E_{n-1} et que l'on prend une base $\mathcal{B}_0$ adaptée à $E_{n-1} = H_0 \oplus G_0$, alors il suit de **12** et **13** que :

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_\omega) = \left(\begin{array}{c|c} M_0 & B \\ \hline 0_{n-2,2} & C \end{array}\right)$$

avec $B \in \mathcal{M}_{2,n-2}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{C})$.
Alors les vecteurs

$$V_{0,1} = \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_{0,2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{n} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

vérifient

$$A' V_{0,1} = V_{0,1} \quad \text{et} \quad A' V_{0,2} = -V_{0,2}$$

de sorte que

$$v_{0,1} = \sqrt{n} Q_0 + L_0 \quad \text{et} \quad v_{0,2} = -\sqrt{n} Q_0 + L_0$$

vérifient

$$\varphi_\omega(v_{0,1}) = v_{0,1} \quad \text{et} \quad \varphi_\omega(v_{0,2}) = -v_{0,2}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\sqrt{n} Q_0 + L_0 \in \ker(\varphi_\omega - \mathrm{id}_{E_{n-1}}) \quad \text{et} \quad -\sqrt{n} Q_0 + L_0 \in \ker(\varphi_\omega + \mathrm{id}_{E_{n-1}}).}$$

15. Supposons $n = 3$. Il suit de **14** que 1 et -1 sont valeurs propres de φ_ω. Notons λ_3 la troisième valeur propre (éventuellement égale à 1 ou à -1). Puisque nous sommes sur $\mathbb{C}$, on a la relation :

$$\mathrm{tr}(\varphi_\omega) = 1 + (-1) + \lambda_3 = \lambda_3.$$

D'autre part, il suit de **2** que

$$\mathrm{tr}(\varphi_\omega) = \mathrm{tr}(A_\omega) = \frac{1 + 2j}{3}.$$

mais

$$\frac{1 + 2j}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = i$$

donc $\lambda_3 = i$.
En conclusion :

$$\boxed{\text{Si } n = 3, \text{ alors } \operatorname{Sp}(\varphi_\omega) = \{-1, 1, i\}.}$$

16. Supposons $n = 4$ de sorte que $\omega = i$. On a :

$$\operatorname{tr}(\varphi_\omega) = \sum_{k=1}^{4} a_{k,k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} i^{(k-1)^2} = \frac{1}{2}(1 + i + 1 + i) = 1 + i.$$

D'autre part, il suit de **14** que 1 et -1 sont valeurs propres de φ_ω. Notons λ_3 et λ_4 les deux autres valeurs propres (éventuellement égales à 1 ou à -1). Puisque nous sommes sur $\mathbb{C}$, on a la relation :

$$\operatorname{tr}(\varphi_\omega) = 1 + (-1) + \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_3 + \lambda_4$$

de sorte que

$$\lambda_3 + \lambda_4 = 1 + i.$$

Par ailleurs, on a établi en **9** que $\operatorname{Sp}(\varphi_\omega) \subset \{-1, 1, -i, i\}$ donc $\{\lambda_3, \lambda_4\} = \{1, i\}$ de sorte que :

$$\boxed{\text{Si } n = 4, \text{ alors } \operatorname{Sp}(\varphi_\omega) = \{-1, 1, i\}.}$$

17. Notons M la matrice considérée. On a

$$M^2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \omega^{2-n} \\ 0 & 0 & \omega^{n-2} & 0 \end{array}\right)$$

donc $M^4 = I_4$ de sorte que $X^4 - 1$ annule M. En particulier M est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(M) \subset \{-1, 1, -i, i\}$.
Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les valeurs propres de M (avec multiplicité éventuelle).
Comme précédemment, on a

$$0 = \operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i.$$

D'autre part, puisque $\operatorname{Sp}(M^2) = \left\{\lambda_i^2 \;\middle|\; 1 \leq i \leq 4\right\}$ et que $\operatorname{tr}(M^2) = 0$, on a :

$$0 = \operatorname{tr}(M^2) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i^2.$$

Or, pour tout $i \in [\![1;4]\!]$, $\lambda_i \in \{-1, 1, -i, i\}$ donc $\lambda_i^2 = \pm 1$ de sorte que deux valeurs propres exactement vérifient $\lambda_i^2 = 1$, les deux autres vérifiant $\lambda_i^2 = -1$.
Sans perte de généralité, on suppose que $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$ de sorte que λ_1 et λ_2 sont dans $\{-1, 1\}$. De même, λ_3 et λ_4 sont dans $\{-i, i\}$. Mais puisque $\operatorname{tr}(M) = 0$, on a nécessairement $\lambda_1 = -\lambda_2$ et $\lambda_3 = -\lambda_4$.
En conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Sp}(M) = \{-1, 1, -i, i\}.}$$

18. On commence par observer que $\omega \times \omega^{n-1} = \omega^n = 1$ de sorte que $\omega^{n-1} = \omega^{-1}$.
Montrons que la famille $(Q_1, Q_{n-1}, L_1, L_{n-1})$ est une base de G. C'est une famille génératrice par définition. Vérifions sa liberté.
Soient a, b, c, d des complexes tels que $aQ_1 + bQ_{n-1} + cL_1 + dL_{n-1} = 0$.
En évaluant l'identité en 1, il vient $a + b = 0$.
Multiplions l'identité par $(X - \omega)(X - \omega^{-1})$. On a donc

$$a(X-\omega)(X-\omega^{-1}) + bX^{n-1}(X-\omega)(X-\omega^{-1}) + c(X-\omega^{-1})(X^n-1) + d(X-\omega)(X^n-1) = 0.$$

Évaluons cette identité en un $z \in \mathbb{U}_n \setminus \left\{1, \omega, \omega^{-1}\right\}$ qui existe car $n \geq 5$. On obtient

$$a(z-\omega)(z-\omega^{-1}) + bz^{n-1}(z-\omega)(z-\omega^{-1}) = 0.$$

Puisque $z^{n-1} \neq 1$ et $(z-\omega)(z-\omega^{-1}) \neq 0$, le système donné par les deux relations sur a et b implique $a = b = 0$.
Évaluons maintenant la relation initiale en ω qui est racine de L_{n-1} mais pas de L_1, il vient $d = 0$. Et puisque $L_1 \neq 0$, il vient ensuite $c = 0$. Ainsi, $a = b = c = d = 0$ et la famille $(Q_0, Q_{n-1}, L_0, L_{n-1})$ est libre. C'est donc une base de G et :

$$\boxed{\dim G = 4.}$$

Déterminons alors les images de chacun des vecteurs de cette base :

$$\begin{aligned}
\varphi_\omega(Q_1) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k X^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega X)^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(\omega X)^n - 1}{\omega X - 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{X^n - 1}{\omega X - 1} \\
&= \frac{1}{\omega\sqrt{n}} \frac{X^n - 1}{X - \omega^{-1}} \\
&= \frac{1}{\omega\sqrt{n}} \frac{X^n - 1}{X - \omega^{n-1}} \\
&= \frac{1}{\omega\sqrt{n}} L_{n-1} \in G.
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
\varphi_\omega(Q_{n-1}) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k)^{n-1} X^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{n-1})^k X^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{-1})^k X^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{-1}X)^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(\omega^{-1}X)^n - 1}{\omega^{-1}X - 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{X^n - 1}{\omega^{-1}X - 1} \\
&= \frac{\omega}{\sqrt{n}} \frac{X^n - 1}{X - \omega} \\
&= \frac{\omega}{\sqrt{n}} L_1 \in G.
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\varphi_\omega(L_1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} L_1(\omega^k) X^k$$

mais, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $L_1(\omega) = 0$ si $k \neq 1$ donc

$$\varphi_\omega(L_1) = \frac{1}{\sqrt{n}} L_1(\omega) X = \frac{1}{\sqrt{n}} L_1(\omega) Q_1 \in G$$

et de même

$$\varphi_\omega(L_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} L_{n-1}(\omega^k) X^k$$

mais, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $L_{n-1}(\omega) = 0$ si $k \neq n-1$ donc

$$\varphi_\omega(L_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} L_{n-1}(\omega^{n-1}) X^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} L_{n-1}(\omega^{-1}) Q_{n-1} \in G.$$

En conclusion :

$$\boxed{\varphi_\omega(G) \subset G.}$$

19. Considérons la matrice N de la restriction de φ_ω à G dans la base $(Q_1, Q_{n-1}, L_1, L_{n-1})$. D'après la question précédente, on peut affirmer que :

$$N = \left(\begin{array}{cc|cc}
0 & 0 & \dfrac{L_1(\omega)}{\sqrt{n}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dfrac{L_{n-1}(\omega^{-1})}{\sqrt{n}} \\
\hline
0 & \dfrac{\omega}{\sqrt{n}} & 0 & 0 \\
\dfrac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Il reste à déterminer les valeurs de $L_1(\omega)$ et $L_{n-1}(\omega^{-1})$.
D'après les relations établies en **18**, on a

$$L_1 = \frac{\sqrt{n}}{\omega} \varphi_\omega(Q_{n-1}) = \frac{\sqrt{n}}{\omega} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k)^{n-1} X^k$$

donc

$$L_1(\omega) = \frac{1}{\omega}\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^k)^{n-1}\omega^k = \frac{1}{\omega}\sum_{k=0}^{n-1}(\underbrace{\omega^{n-1}\omega}_{=1})^k = \frac{n}{\omega}$$

de sorte que

$$\frac{L_1(\omega)}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\omega}.$$

De même,

$$L_{n-1} = \omega\sqrt{n}\varphi_\omega(Q_1) = \omega\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k X^k$$

donc

$$L_{n-1}(\omega^{-1}) = \omega\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k(\omega^{-1})^k = n\omega$$

de sorte que :

$$\frac{L_{n-1}(\omega^{-1}}{\sqrt{n}} = \omega\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}}.$$

En particulier, N est égale à la matrice étudiée à la question **17**. Il s'ensuit que $\chi_N = X^4 - 1$ mais χ_N est le polynôme caractéristique de la restriction de φ_ω au sous-espace stable G donc χ_N divise χ_{φ_ω} de sorte que $X^4 - 1$ divise χ_{φ_ω} et donc

$$\{-1, 1, -i, i\} \subset \mathrm{Sp}(\varphi_\omega).$$

Puisque l'inclusion réciproque a été établie en **9**, il vient :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi_\omega) = \{-1, 1, -i, i\}.}$$

Exercice 3

1. Pour tout x réel, on a :

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{1}{n!}$$

donc le rayon de convergence de la série entière définissant f est supérieur ou égal à celui de la série exponentielle, qui est égal à $+\infty$.
En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

3. Si $R \in [0, +\infty]$ est le rayon de convergence d'une série entière, on sait que sa somme est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R; R[$. Dans le cas présent, on a donc :

$$\boxed{f \in C^\infty(\mathbb{R}).}$$

4. Soient a, b des réels tels que $a \leq b$. Puisque f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, sa dérivée f' est continue sur $[a, b]$. D'après le **théorème des bornes atteintes**, elle est bornée (et atteint ses bornes) sur le compact $[a, b]$. Notons $M_{a,b}$ un réel tel que

$$\forall t \in [a, b], \quad \left|f'(t)\right| \leq M_{a,b}.$$

Alors, d'après l'**inégalité des accroissements finis** :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M_{a,b} \, |x - y| \, .$$

En particulier :

$$\boxed{f \text{ est lipschitzienne sur tout segment.}}$$

5. Pour tout x réel, on a par **dérivation terme à terme** d'une somme de série entière à l'intérieur de son disque de convergence :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k!(k-1)!}$$

alors, pour tout $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} e^x - f'(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k!(k-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!k!} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!k!} \right) x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(k+1)! - 1}{(k+1)!k!}}_{\geq 0} x^k \geq 0$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) \leq e^x.}$$

6. Soient x, y positifs et $z = \max(x, y)$. D'après le **théorème des accroissements finis**, il existe $c \in]x, y[$ tel que :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

donc

$$|f(x) - f(y)| \leq \left| f'(c) \right| |x - y|$$

mais, d'après **5**, on a $f'(c) \leq e^c$ et, par positivité de f' sur $\mathbb{R}_+$, on a $|f'(c)| \leq e^c$. Enfin, $c \leq \max(x, y) = z$ donc, par croissance de l'exponentielle :

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|.}$$

7. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

mais, pour tout $x > 0$,

$$S(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n!)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{((n+1)!)^2}.$$

S est ainsi la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, elle est en particulier continue en 0 mais le terme constant de la série entière étant nul, on a :

$$\lim_{x \to 0} S(x) = 0$$

et donc

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + x + o(x)$$

de sorte que :

$$\boxed{f(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x.}$$

8. Pour tout $t > 0$, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n!)^2} > 0$ et f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{tf(t)^2}$ est de classe C^∞. D'après le **théorème fondamental de l'analyse**, g est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. En particulier, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g' = f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. En conclusion :

$$\boxed{g \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*).}$$

9. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

— Si $x < 1$, alors

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{tf(t)^2}\,\mathrm{d}t = -\int_x^1 \frac{1}{tf(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

et, pour tout $t \in [x, 1]$, $\dfrac{1}{tf(t)^2} \geq 0$ donc, par **croissance de l'intégrale**, les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant, on a $g(x) \leq 0$.

— Si $x \geq 1$, alors pour tout $t \in [x, 1]$, $\dfrac{1}{tf(t)^2} \geq 0$ donc, par **croissance de l'intégrale**, les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant, on a $g(x) \geq 0$.

En conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) \geq 0 \iff x \geq 1.}$$

10. Nous allons appliquer le **théorème d'intégration des relations de comparaison** dans le cas divergent :

— f étant continue sur $\mathbb{R}$, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(1) = 1$ donc :

$$\frac{1}{tf(t)^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}.$$

— les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{tf(t)^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont continues et positives sur $]0, 1]$.

— L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge, comme intégrale de Riemann divergente.

Ainsi, par intégration des relations de comparaison, on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{tf(t)^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln(x)$$

de sorte que

$$\boxed{g(x) = -\int_x^1 \frac{1}{tf(t)^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x).}$$

11. Pour tout $t > 0$, on a :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{(k!)^2} = 1 + t + \sum_{k=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{t^k}{(k!)^2}}_{>0} > 1 + t.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(t) > 1 + t.}$$

12. Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{tf(t)^2}$ est positive, sa primitive g est croissante. Par ailleurs. Soit $x > 0$. D'après **11**, pour tout $t \in]0, x]$, on a :

$$\frac{1}{tf(t)^2} \leq \frac{1}{t(1+t)^2}$$

mais $t \mapsto \dfrac{1}{t(1+t)^2}$ est positive, continue et intégrable sur $[1, +\infty[$ car **dominée** par $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ qui est intégrable sur cet intervalle d'après le **critère de Riemann**.
Alors :

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{tf(t)^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{1}{t(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

de sorte que g est croissante et majorée sur $[1, +\infty[$. Il suit du **théorème de la limite monotone** que :

$$\boxed{g \text{ admet une limite finie en } +\infty.}$$

13. On pose $F(X) = \dfrac{1}{X(1+X)^2}$. Le théorème de **décomposition en éléments simples** assure qu'il existe des réels α, β et γ tels que :

$$F(X) = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{(1+X)^2} + \frac{\gamma}{1+X}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \alpha &= [XF(X)]_{|X=0} = 1 \\ \beta &= \left[(1+X)^2 F(X)\right]_{|X=-1} = -1 \end{aligned}$$

et, par différence :

$$\frac{\gamma}{1+X} = \frac{1}{X(1+X)^2} - \frac{1}{X} + \frac{1}{(1+X)^2} = -\frac{1}{1+X}$$

donc $\gamma = -1$.
En conclusion :

$$\boxed{\frac{1}{X(1+X)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{(1+X)^2} - \frac{1}{1+X}.}$$

14. Soit $x > 1$. Pour tout $t \in [1, x]$, il suit de **11** et **13** que

$$\frac{1}{tf(t)^2} \leq \frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t}$$

donc, par croissance de l'intégrale sur $[1, x]$:

$$g(x) \leq \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\ln(t) - \ln(1+t) + \frac{1}{1+t}\right]_1^x = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{1+x} + \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in]1; +\infty[\,, \quad g(x) \leq \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{1+x} + \ln(2) - \frac{1}{2}.}$$

15. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

— Si $x \leq 1$, on a vu en **9** que $g(x) \leq 0 \leq \ln(2)$.

— Si $x > 1$, on a vu en **14** que $g(x) = \ln(2) + \varphi(x)$ où $\varphi : x \mapsto \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \in C^\infty(]1, +\infty[)$.
Mais pour tout $x > 1$, on a :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x(1+x)^2} > 0$$

donc φ est croissance sur $]1, +\infty[$.
Mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\frac{1}{2} < 0$ donc, pour tout $x > 1$, on a $g(x) = \ln(2) + \varphi(x) < \ln(2)$.

En conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) \leq \ln(2).}$$

*** Fin du sujet ***