E3A - MPI 2025 - Mathématiques

Éléments de correction

Exercice 1

1. Les applications coordonnées étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction exp étant C^1 sur $\mathbb{R}$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ comme somme de compositions d'applications C^1.

En outre, pour tout $m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\nabla(f)(m) = (e^{x_1},\ e^{x_2}, \dots, e^{x_n}) \neq (0,\ 0,\ \dots, 0)$$

donc f n'admet pas de point critique sur $\mathbb{R}^n$.

Puisque $\mathbb{R}^n$ est ouvert, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum local sur } \mathbb{R}^n.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x, 0, \dots, 0) = e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

donc :

$$\boxed{f \text{ n'est pas majorée sur } \mathbb{R}^n.}$$

3. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} e^{x_j} > 0$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} f(x, 0, \dots, 0) = 0$$

donc :

$$\boxed{\inf_{m \in \mathbb{R}^n} f(m) = 0.}$$

4. L'application g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et, pour tout $m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\nabla(g)(m) = (1,\ 1,\ \dots, 1)$$

de sorte que dg ne s'annule pas sur H, la contrainte est donc non critique.

D'après le **théorème d'optimisation sous contrainte**, si f admet un extremum sous la contrainte H en $m = (x_1, \dots, x_n)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla(f)(m) = \lambda \nabla(g)(m),$$

c'est-à-dire :

$$\left(e^{x_1},\ e^{x_2}, \dots, e^{x_n}\right) = (\lambda,\ \lambda,\ \dots, \lambda)\,.$$

On a donc nécessairement $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Mais $m \in H$ donc $\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$ de sorte que $m = (0, 0, \dots, 0)$.

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ admet un unique point critique sous la contrainte } H \text{ en } (0, 0, \dots, 0).}$$

5. La fonction $t \mapsto e^t$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc son graphe est situé au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier de sa tangente en 0. Autrement dit :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^t \geq 1 + t.}$$

6. D'une part, on a $f(0, 0, \dots, 0) = n$.

D'autre part, d'après la question **5**, pour tout $m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(m) = \sum_{j=1}^{n} e^{x_j} \geq \sum_{j=1}^{n} (1 + x_j) = n + \sum_{j=1}^{n} x_j$$

donc, pour tout $m = (x_1, \dots, x_n) \in H$, on a :

$$f(m) \geq n = f(0, 0, \dots, 0).$$

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ présente un minimum global sous la contrainte } H \text{ en } (0, 0, \dots, 0) \text{ qui vaut } n.}$$

Exercice 2

1. C'est du cours : Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.

2. On observe que

$$X^n - 1 = X^n - X + X - 1 = 1 \times (X^n - X) + (X - 1)$$

et $\deg(X-1) = 1 < n = \deg(X^n - X)$ donc, par unicité de la division euclidienne :

$$\boxed{\text{Le reste de la division euclidienne de } X^n - 1 \text{ par } X^n - X \text{ est } X - 1.}$$

3. D'après la question **2**, on a :

$$(X^n - 1) \wedge (X^n - X) = (X^n - 1) \wedge (X - 1)$$

mais $X - 1$ divise $X^n - 1$ donc $(X^n - 1) \wedge (X - 1) = X - 1$ et donc :

$$\boxed{(X^n - 1) \wedge (X^n - X) = X - 1.}$$

4. Posons, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, $\omega_\ell = e^{\frac{2i\pi}{\ell}}$. Alors

$$\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_n^k).}$$

De même

$$X^{n-1} - 1 = \prod_{k=0}^{n-2} (X - \omega_{n-1}^k)$$

de sorte que

$$X^n - X = X \prod_{k=0}^{n-2} (X - \omega_{n-1}^k).$$

En posant $z_n = 0$ et $z_k = \omega_{n-1}^{k-1}$ pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, on a donc :

$$\boxed{B = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k).}$$

5. On commence par observer que, pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $\deg(f(P)) < \deg(B) = n$ par définition de la division euclidienne de sorte que $f(E) \subset E$.
Soient $(S, T) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On considère les divisions euclidiennes :

$$AS = Q_S B + R_S \quad \text{et} \quad AT = Q_T B + R_T$$

avec $Q_S, Q_T \in \mathbb{C}[X]$ et $R_S = f(S) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $R_T = f(T) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Alors

$$A(\lambda S + T) = \lambda AS + AT = \lambda Q_S B + \lambda R_S + Q_T B + R_T = (\lambda Q_S + Q_T)B + (\lambda R_S + R_T)$$

mais $\lambda R_S + R_T \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ de sorte qu'il s'agit du reste de la division euclidienne de $A(\lambda S + T)$ par B. Ainsi, $f(\lambda S + T) = \lambda f(S) + f(T)$, ce qui assure la linéarité de f.
En conclusion :

$$\boxed{f \in \mathcal{L}(E).}$$

6. Soit $k \in [\![0; n-2]\!]$. On a

$$AX^k = X^{n+k} - X^k = X^{n+k} - X^{k+1} + X^{k+1} - X^k = \underbrace{(X^n - X)}_{=B}X^k + X^{k+1} - X^k$$

et $\deg(X^{k+1} - X^k) = k + 1 \leq n - 1 < n = \deg(B)$ donc $X^{k+1} - X^k$ est le reste de la division euclidienne de AX^k par B.
En conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [\![0; n-2]\!], \quad f(X^k) = X^{k+1} - X^k.}$$

7. De même, on a :

$$\begin{aligned} AX^{n-1} &= X^{2n-1} - X^{n-1} \\ &= (X^n - X)X^{n-1} + X^n - X^{n-1} \\ &= (X^n - X)X^{n-1} + X^n - X + X - X^{n-1} \\ &= \underbrace{(X^n - X)}_{=B}(X^{n-1} + 1) + (X - X^{n-1}) \end{aligned}$$

et $\deg(X - X^{n-1}) = n - 1 < \deg(B)$ donc $X - X^{n-1}$ est le reste de la division euclidienne de AX^{n-1} par B.
En conclusion :

$$\boxed{f(X^{n-1}) = X - X^{n-1}.}$$

8. D'après les identités établies en **6** et **7**, on a :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

9. Il suit immédiatement de la question précédente que :

$$\boxed{\operatorname{tr}(M) = -n.}$$

10. Si on note $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de M, on observe que

$$\sum_{i=2}^{n} C_i = 0$$

de sorte que $\operatorname{rg}(M) \leq n-1$.

Par ailleurs, le **mineur principal** d'ordre $n-1$ est égal à $(-1)^{n-1} \neq 0$ donc $\operatorname{rg}(M) \geq n-1$. On en déduit :

$$\boxed{\operatorname{rg}(M) = n-1.}$$

11. On a observé en **10** que $C_n \in \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_{n-1})$ donc $f(X^{n-1}) \in \operatorname{Vect}\big(f(1), f(X), \dots, f(X^{n-2})\big)$. Ainsi :

$$\operatorname{im}(f) = \operatorname{Vect}\big(f(1), f(X), \dots, f(X^{n-1})\big) = \operatorname{Vect}\big(f(1), f(X), \dots, f(X^{n-2})\big)$$

et, puisque $\dim \operatorname{im}(f) = \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(M) = n-1$, on en déduit que :

$$\boxed{\big(f(1), f(X), \dots, f(X^{n-2})\big) \text{ est une base de } \operatorname{im}(f).}$$

12. En reprenant l'observation effectuée en **10** que $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} C_i = 0$, on en déduit que :

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} f(X^i) = f\left(\sum_{i=1}^{n-1} X^i\right)$$

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} X^i \in \ker(f) \setminus \{0\}$. Mais, d'après le **théorème du rang**, on a

$$\dim \ker(f) = n - \operatorname{rg}(f) = 1$$

donc, par dimension :

$$\boxed{\ker(f) = \operatorname{Vect}\left(\sum_{i=1}^{n-1} X^i\right).}$$

13. D'après les questions **11** et **6**, on a :

$$\operatorname{im}(f) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k f(X^k) \;\middle|\; (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}) \in \mathbb{C}^{n-1} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k (X^{k+1} - X^k) \,\middle|\, (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}) \in \mathbb{C}^{n-1} \right\} \\
&= \left\{ (X-1) \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k X^k \,\middle|\, (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}) \in \mathbb{C}^{n-1} \right\} \\
&= \{(X-1)P \mid P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]\}
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\operatorname{im}(f) = \{(X-1)P \mid P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]\}\,.}$$

14. Soit $P \in \operatorname{im}(f) \cap \ker(f)$. Puisque $\operatorname{im}(f) = (X-1)\mathbb{C}_{n-2}[X]$, on a nécessairement $P(1) = 0$. Mais $P \in \ker(f) = \operatorname{Vect}\left(\sum_{i=1}^{n-1} X^i\right)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P = \lambda \sum_{i=1}^{n-1} X^i$ de sorte que $P(1) = n\lambda$. Ainsi $\lambda = 0$ et donc $P = 0$. Il s'ensuit que $\operatorname{im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

Par ailleurs, il suit du **théorème du rang** que $\dim \operatorname{im}(f) + \dim \ker(f) = \dim E$ donc :

$$\boxed{E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f).}$$

15. Soit $j \in [\![1;n]\!]$. On a

$$P_j(z_j) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} (z_j - z_k)$$

mais les z_i sont deux à deux distincts donc chaque $z_j - z_k$ est non nul et, par intégrité de $\mathbb{C}$:

$$\boxed{P_j(z_j) \neq 0.}$$

16. Soit $j \in [\![1;n]\!]$. On écrit la division euclidienne de AP_j par B :

$$AP_j = BQ_j + R_j.$$

Les racines de P_j sont les z_k pour $k \in [\![1;n]\!]$ et $k \neq j$. Pour un tel k, on a donc :

$$A(z_k)P_j(z_k) = B(z_k)Q_j(z_k) + R_j(z_k)$$

mais $P_j(z_k) = 0$ et $B(z_k) = 0$ donc $R_j(z_k) = 0$ de sorte que les z_k pour $k \in [\![1;n]\!]$ et $k \neq j$ sont tous racines de R_j.

$$\boxed{\text{Les racines de } P_j \text{ sont racines de } R_j.}$$

17. On a $\deg(R_j) < \deg(B) = n$ donc R_j admet au plus $n-1$ racines. On a montré par ailleurs à la question **16** que R_j admet $n-1$ racines distinctes, que sont les z_k pour $k \in [\![1;n]\!]$ et $k \neq j$. Si on note λ_j le coefficient dominant de R_j, on a donc :

$$R_j = \lambda_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (X - z_k)$$

et donc

$$\boxed{R_j = \lambda_j P_j.}$$

Puisque $R_j = f(P_j)$, on a $f(P_j) = \lambda_j P_j$ et donc :

$$\boxed{P_j \text{ est un vecteur propre de } f \text{ associé à la valeur propre } \lambda_j.}$$

18. On écrit la division euclidienne de AP_j par B :

$$AP_j = BQ_j + R_j$$

que l'on évalue en z_j et on obtient

$$A(z_j)P_j(z_j) = B(z_j)Q_j(z_j) + R_j(z_j)$$

mais $B(z_j) = 0$ et $R_j = \lambda_j P_j$ donc

$$A(z_j)P_j(z_j) = \lambda_j P_j(z_j).$$

Puisque l'on a établi en **15** que $P_j(z_j) \neq 0$, on en déduit :

$$\boxed{A(z_j) = \lambda_j.}$$

19. Soit $j \in [\![1;n-1]\!]$. D'après **18**, on a :

$$\lambda_j = A(z_j) = z_j^n - 1$$

mais $z_j^{n-1} = 1$ donc $z_j^n = z_j$ et donc $\lambda_j = z_j - 1$.
Pour $j = n$, on a $z_j = z_n = 0$ donc

$$\lambda_n = A(0) = -1.$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall j \in [\![1;n]\!], \quad \lambda_j = z_j - 1.}$$

20. Les z_j pour $j \in [\![1;n]\!]$ sont deux à deux distincts donc il en est de même des λ_j. Par ailleurs, il suit de **17** que chaque λ_j est une valeur propre de f. Ainsi, f est admet n valeurs propres distinctes et $\dim E = \dim \mathbb{C}_{n-1}[X] = n$ donc :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

21. Puisque χ_f est scindé, on a

$$\operatorname{tr}(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} (z_j - 1) = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right) - n$$

mais

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{j=1}^{n-1} z_j = \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{n-1}^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-2} \omega_{n-1}^{j} = \frac{\omega_{n-1}^{n-1} - 1}{\omega_{n-1} - 1} = 0$$

donc :

$$\boxed{\operatorname{tr}(f) = -n,}$$

résultat qui est cohérent avec celui établi à la question **9**.

22. Puisque les λ_j sont les valeurs propres de f, on a :

$$\begin{aligned}
\chi_f &= \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \big(X - (z_j - 1)\big) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \big((X + 1) - z_j\big) \\
&= B(X + 1) \\
&= (X + 1)^n - (X + 1)
\end{aligned}$$

et, avec le binôme de Newton, il vient après simplification :

$$\boxed{\chi_f = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^k + (n-1)X.}$$

23. Notons g l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{im}(f)$. On a établi à la question **14** que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$ et on sait que $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ sont des sous-espaces stables par f. Alors, quitte à considérer la matrice représentative de f dans une base adaptée à cette décomposition, on a :

$$\chi_f = X\chi_g$$

mais, d'après **22**, on a :

$$\chi_g = \frac{1}{X}\chi_f = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^{k-1} + (n-1) = n + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} X^k.$$

Mais alors
$$\det(g) = (-1)^{n-1}\chi_g(0) = (-1)^{n+1}(n+1).$$
On a donc :
$$\boxed{\det(g) = (-1)^{n+1}(n+1).}$$

Exercice 3

1. Le développement en série entière demandé est

$$\boxed{\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n}$$

et il est valide sur $]-1;1[$ uniquement.

2. Par dérivation terme à terme d'une série entière à l'intérieur de son domaine de convergence, on a :

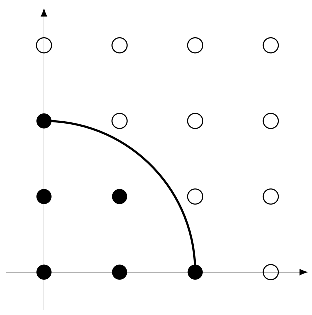
$$\boxed{\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)t^n.}$$

3. C'est du cours, la réponse correcte est la réponse (d).

4. On reconnaît une **somme de Riemann** à gauche associée à la fonction f continue sur le segment $[a,b]$. On sait alors que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

5. Les points de E_2 sont les points de coordonnées entières coloriés en noir sur le graphique suivant :



On a en particulier :

$$\boxed{G(2) = 6.}$$

6. L'application $u \mapsto \sin(u)$ induit une bijection de classe C^1 de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ vers $[0;1]$. En outre, pour tout $u \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sqrt{1-\sin(u)^2} = |\cos(u)| = \cos(u)$ donc, en en posant $t = \sin(u)$, il vient :

$$\int_0^1 (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1+\cos(2u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}.$$

En conclusion :

$$\boxed{J = \frac{\pi}{4}.}$$

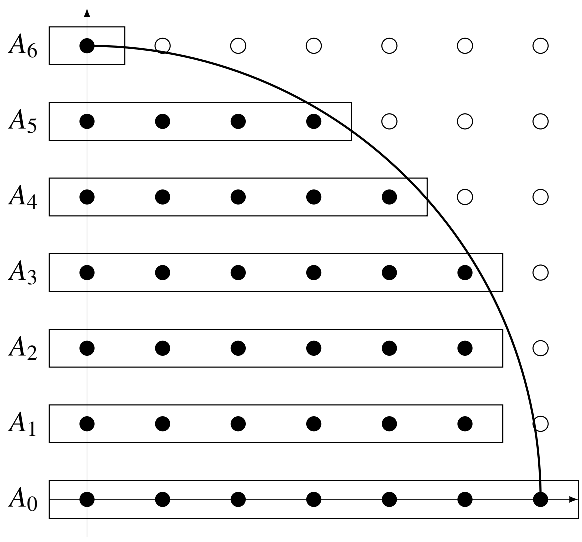
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $m = (a, b) \in E_n$, on a $a^2 + b^2 \leq n^2$ donc $b \in [\![0; n]\!]$. On peut donc partitionner E_n comme suit :

$$\begin{aligned} E_n &= \bigsqcup_{k=0}^{n} \left\{(a,k) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; \sqrt{a^2+k^2} \leq n\right\} \\ &= \bigsqcup_{k=0}^{n} \left\{(a,k) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; a^2 \leq n^2 - k^2\right\} \\ &= \bigsqcup_{k=0}^{n} \underbrace{\left\{(a,k) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; a \leq \sqrt{n^2-k^2}\right\}}_{=A_k} \end{aligned}$$

de sorte que $G(n) = \operatorname{card}(E_n) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}(A_k)$. Mais le cardinal de A_k est égal au nombre d'entiers compris entre 0 et $\sqrt{n^2-k^2}$, donc $\operatorname{card}(A_k) = \left\lfloor \sqrt{n^2-k^2} \right\rfloor + 1$ et :

$$\boxed{G(n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor \sqrt{n^2-k^2} \right\rfloor + 1 \right).}$$

Remarque : L'*énoncé proposait de faire un dessin, ce qui aurait ici donné pour* $n = 6$ *:*



8. La fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ étant continue sur $[0; 1]$, il suit de la question **4** que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/2} = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, \mathrm{d}t$$

et donc, d'après **6**, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/2} = \frac{\pi}{4}.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(n^2-k^2\right)^{1/2} \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/2} \\ &= n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/2}\right) \end{aligned}$$

et donc, il suit de **8** que :

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}n^2.}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a :

$$\sqrt{n^2-k^2} < \left\lfloor \sqrt{n^2-k^2} \right\rfloor + 1 \leq \sqrt{n^2-k^2}+1$$

donc, en sommant pour k allant de 0 à n, il vient :

$$S_n < G(n) \leq S_n + (n+1)$$

mais $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}n^2$ donc $(n+1) \underset{n\to+\infty}{=} o(S_n)$ et donc les membres de droite et de gauche de l'inégalité sont tous deux équivalents à S_n quand n tend vers l'infini. Par encadrement :

$$\boxed{G(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}n^2.}$$

11. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que $x \leq y$. On a $E_x \leq E_y$ donc $G(x) \leq G(y)$ de sorte que G est une application croissante sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$G(\lfloor x \rfloor) \leq G(x) \leq G(\lfloor x \rfloor + 1)$$

mais, d'après **10**, on a

$$G(\lfloor x \rfloor) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}\lfloor x \rfloor^2 \quad \text{et} \quad G(\lfloor x \rfloor + 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}(\lfloor x \rfloor + 1)^2.$$

Or $x-1 \leq \lfloor x \rfloor < x$ donc, par encadrement $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ de sorte que

$$G(\lfloor x \rfloor) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}x^2 \quad \text{et} \quad G(\lfloor x \rfloor + 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}(x+1)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}x^2.$$

Par encadrement :

$$\boxed{G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}x^2.}$$

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leq 1$ et la série $\sum_n t^n$ a un rayon de convergence égal à 1 donc $R \geq 1$.
Par ailleurs, pour $t = 1$, la série $\sum_n a_n t^n$ diverge grossièrement car il y a une infinité de carrés parfaits, ainsi $R \leq 1$. En conclusion :

$$\boxed{R = 1.}$$

13. Les séries entières étant absolument convergentes à l'intérieur de leur domaine de convergence, on peut effectuer des **produits de Cauchy** sur $]-1;1[$ des séries entières considérées. Pour tout $t \in]-1;1[$, on a donc :

$$h(t)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)}_{=b_n} t^n$$

de sorte que

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \times 1\right) t^n$$

mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell a_{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \sum_{k=\ell}^{n} a_{k-\ell}$$

mais $a_\ell = 0$ si ℓ n'est pas un carré et 1 sinon de sorte que

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{m=0}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\sum_{k=m^2}^{n} a_{k-m^2} = \sum_{m=0}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\sum_{k=0}^{n-m^2} a_k$$

et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-m^2} a_k$ est égal au nombre de carrés entre 0 et $n - m^2 = (\sqrt{n})^2 - m^2$ de sorte que

$$\sum_{m=0}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\sum_{k=0}^{n-m^2} a_k = G(\sqrt{n})$$

et donc :

$$\boxed{\forall t \in \left]-1;1\right[, \quad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} G(\sqrt{n})t^n.}$$

14. D'après **11**, on a :

$$G(\sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}n \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)\frac{\pi}{4}$$

de sorte que

$$G(\sqrt{n}) - (n+1)\frac{\pi}{4} \underset{n\to+\infty}{=} o\left((n+1)\frac{\pi}{4}\right)$$

et donc

$$G(\sqrt{n}) - (n+1)\frac{\pi}{4} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n+1\right)$$

ce qui se traduit en quantificateurs :

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \left|G(\sqrt{n}) - (n+1)\frac{\pi}{4}\right| \leq \epsilon(n+1).}$$

15. Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $t \in \left]-1;1\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|g(t) - \frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)t^n\right| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(G(\sqrt{n}) - (n+1)\frac{\pi}{4}\right)t^n\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty}\left|G(\sqrt{n}) - (n+1)\frac{\pi}{4}\right||t|^n \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1}\left|G(\sqrt{n}) - (n+1)\frac{\pi}{4}\right||t|^n}_{=K(t)} + \sum_{n=n_0}^{+\infty}\left|G(\sqrt{n}) - (n+1)\frac{\pi}{4}\right||t|^n \\
&\leq K(t) + \epsilon\sum_{n=n_0}^{+\infty}(n+1)\,|t|^n \\
&\leq K(t) + \epsilon\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,|t|^n \\
&= K(t) + \epsilon\frac{1}{(1-|t|)^2}
\end{aligned}$$

mais K est polynomiale en $|t|$ donc admet une limite finie quand t tend vers 1^- de sorte que $K(t) \underset{t\to1^-}{=} o\left(\frac{1}{(1-t)^2}\right)$. Il s'ensuit qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in \left]1-\eta;1\right[$, on a :

$$\left|g(t) - \frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)t^n\right| \leq 2\epsilon\frac{1}{(1-t)^2}.$$

Ceci étant vrai pour tout ϵ, on en déduit que

$$g(t) - \frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)t^n \underset{t\to 1^-}{=} o\left(\frac{1}{(1-t)^2}\right).$$

Puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)t^n = \frac{1}{(1-t)^2}$, on en déduit :

$$g(t) - \frac{\pi}{4}\frac{1}{(1-t)^2} \underset{t\to 1^-}{=} o\left(\frac{1}{(1-t)^2}\right)$$

et donc :

$$\boxed{g(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{\pi}{4}\frac{1}{(1-t)^2}.}$$

*** Fin du sujet ***