E3A - MPI 2025 - Mathématiques

Durée : 4h

Exercice 1

Soit $f : m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{j=1}^{n} e^{x_j} \in \mathbb{R}$.

1. Étudier l'existence d'extrema locaux de f.
2. La fonction f est-elle majorée ?
3. Démontrer que f admet une borne inférieure que l'on déterminera.

Soit g la fonction qui à $m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe $g(m) = \sum_{j=1}^{n} x_j$.

On note $H = g^{-1}(\{0\}) = \left\{ m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \right\}$.

4. Déterminer le seul extremum possible de la restriction de f à H.
5. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^t \geqslant 1 + t$.
6. En déduire que f admet, sous la contrainte H, un minimum global que l'on déterminera.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note dans tout l'exercice :

— $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

— A et B les deux polynômes : $A = X^n - 1$ et $B = X^n - X$.

Questions préliminaires

1. Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
2. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.
3. Déterminer le PGCD des polynômes A et B.
4. Décomposer les deux polynômes A et B en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Les n racines distinctes de B seront notées : $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ et z_n avec $z_n = 0$.
On considère l'application f qui à tout polynôme P de E, associe le reste de la division euclidienne du produit AP par B.

5. Prouver que f est un endomorphisme de E.
6. Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. En posant la division euclidienne, déterminer $f\left(X^k\right)$.
7. De la même façon, déterminer $f\left(X^{n-1}\right)$.
8. En déduire la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B} = \left(1, X, \dots, X^{n-1}\right)$ de E.
9. Calculer la trace de M.

Étude du noyau et de l'image de f

10. Justifier que le rang de M est égal à $n-1$.

11. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

12. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

13. Justifier que $\mathrm{Im}(f) = \{(X-1)P \mid P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]\}$.

14. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

Éléments propres de f

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On note P_j le polynôme de E défini par $P_j = \dfrac{B}{X - z_j} = \displaystyle\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(X - z_k)$ et $R_j = f\left(P_j\right)$.

15. Vérifier que $P_j\left(z_j\right) \neq 0$.

16. Montrer que les racines de P_j sont racines de R_j.

17. En déduire qu'il existe un scalaire λ_j tel que $R_j = \lambda_j P_j$. Que peut-on alors dire du polynôme P_j ?

18. Montrer que l'on a : $A\left(z_j\right) = \lambda_j$.

19. En déduire l'expression de λ_j à l'aide de z_j. On précisera la valeur de λ_n.

20. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

21. Retrouver la valeur de la trace de l'endomorphisme f.

22. Déterminer le polynôme caractéristique χ_f de l'endomorphisme f sous forme développée.

23. En déduire le déterminant de l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3

Questions préliminaires

1. Déterminer le développement en série entière de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ et donner son domaine de validité.

2. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+1)t^n$.

3. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$ deux séries entières définies sur $]-R, R[$ (avec $R > 0$). On note $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n t^n$ le produit de Cauchy de ces deux séries entières. Soit $n \in \mathbb{N}$. Choisir sans justification l'expression correcte de c_n :

(a) $c_n = \displaystyle\sum_{p-q=n} a_p b_q$ (b) $c_n = \displaystyle\sum_{p-q\leq n} a_p b_q$ (c) $c_n = \displaystyle\sum_{p+q\leq n} a_p b_q$ (d) $c_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} a_p b_q$

4. Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

Rappeler sans démonstration la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

*****

On rappelle que si t est un réel, $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t et que l'on a : $\lfloor t \rfloor \leqslant t < \lfloor t \rfloor + 1$ ou encore $t - 1 < \lfloor t \rfloor \leqslant t$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on note E_x l'ensemble : $E_x = \left\{m = (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ \sqrt{a^2+b^2} \leqslant x\right\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ à coordonnées entières positives du disque fermé de centre O et de rayon x.

On pose enfin $G(x) = \mathrm{Card}\,(E_x)$.

5. Représenter graphiquement E_2 et déterminer $G(2)$.

6. En utilisant le changement de variable $t = \sin(u)$, calculer l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{1/2}\,\mathrm{d}t$.

7. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, G(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \right\rfloor + 1\right)$. On pourra s'aider d'un dessin.

8. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/2} = \frac{\pi}{4}$.

9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2}$. Démontrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 \dfrac{\pi}{4}$.

10. En déduire un équivalent de $G(n)$ lorsque l'entier n tend vers plus l'infini.

11. Déterminer alors un équivalent de la fonction G au voisinage de plus l'infini.

12. On définit la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ où a_n vaut 1 si n est le carré d'un entier et 0 sinon.

Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. On notera h la somme de cette série.

13. On pose, pour $t \in I =]-1;1[$, $g(t) = \dfrac{h(t)^2}{1-t}$. Prouver que : $\forall t \in I, g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} G(\sqrt{n})t^n$.

Un équivalent de g

13. Montrer que l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \text{tel que } \forall n \geqslant n_0, \left|G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1)\right| \leqslant \varepsilon(n+1)$$

14. En majorant la quantité $\left|g(t) - \dfrac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)t^n\right|$, montrer que $g(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{\pi}{4}(1-t)^{-2}$.

*** Fin du sujet ***