

Éléments de correction

Exercice 1

Q1. Les trois colonnes de J sont égales et non nulles donc $\text{rg}(J) = 1$. Il suit du théorème du rang que $\dim \ker(J) = 2$ donc 0 est valeur propre de multiplicité géométrique égale à 2.

Par ailleurs, on a $J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc 3 est valeur propre de J . Par dimension on a $1 \leq \dim E_3(J) \leq 3 - \dim E_0(J) = 1$ donc $\dim E_3(J) = 1$.

Il s'ensuit que

$$\dim E_0(J) + \dim E_3(J) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

donc :

$$\exists P \in \text{GL}_3(\mathbb{R}), \quad P^{-1}JP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Q2. On a $A = aJ + bI_3$ donc

$$P^{-1}AP = aP^{-1}JP + bP^{-1}I_3P = aD + bI_3 = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3a + b \end{pmatrix}.$$

En conclusion :

$$A \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3a + b \end{pmatrix}.$$

Q3. A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc son polynôme minimal π_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Par ailleurs, les racines de π_A sont les valeurs de propres de A qui, d'après la question précédente, sont b et $3a + b$. Puisque π_A est unitaire, on a :

$$\pi_A = (X - b)(X - 3a - b).$$

Q4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ assure l'existence de $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que :

$$X^n = \pi_A Q_n + R_n,$$

avec $\deg(R_n) < \deg(\pi_A) = 2$. Ainsi, il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$(\star) : \quad X^n = \pi_A Q_n + \alpha_n X + \beta_n.$$

► En évaluant (\star) en b et en $3a + b$, qui sont racines de π_A , on a :

$$\begin{cases} b^n = \alpha_n b + \beta_n \\ (3a + b)^n = \alpha_n(3a + b) + \beta_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_n = b^n - \alpha_n b \\ 3a\alpha_n = (3a + b)^n - b^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = \frac{(3a + b)^n - b^n}{3a} \\ \beta_n = b^n - b \frac{(3a + b)^n - b^n}{3a} \end{cases}$$

► D'autre part, en évaluant (★) en A , puisque π_A annule A , on a :

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{(3a+b)^n - b^n}{3a} A + \left(b^n - b \frac{(3a+b)^n - b^n}{3a} \right) I_3.$$

b) Une récurrence sur k montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1} J$. Puisque $A = aJ + bI_3$ et que $JI_3 = J = I_3J$, on peut appliquer le **binôme de Newton** et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} A^n &= (aJ + bI_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k J^k b^{n-k} \\ &= b^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k 3^{k-1} J b^{n-k} \\ &= b^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} \right) J \\ &= b^n I_3 + \frac{(3a+b)^n - b^n}{3} J. \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = b^n I_3 + \frac{(3a+b)^n - b^n}{3} J.$$

Exercice 2

Q5. On a $j^3 = 1$ donc

$$0 = j^3 - 1 = (j - 1)(1 + j + j^2)$$

mais $j \neq 1$ donc :

$$1 + j + j^2 = 0.$$

Considérons le polynôme $P = 2X^2 + X - 1$. On pourrait faire le calcul explicitement mais on peut simplement observer, indépendamment de la valeur de P que, comme P est à coefficients réels :

$$P(j)P(j^2) = P(j)P(\bar{j}) = P(j)\overline{P(j)} = |P(j)|^2 \in \mathbb{R}.$$

Q6. La matrice J est la matrice compagnon du polynôme $X^n - 1$. On sait alors qu'en effectuant un développement par rapport à la première colonne puis par rapport à la première ligne on a :

$$\chi_J(X) = \det(XI_n - J) = X^n - 1.$$

Sans calculer de déterminant, on peut aussi observer que J est la matrice de permutation correspondant au n -cycle $(1\ 2\ \dots\ n-1\ n)$ donc $J^n = I_n$ et, pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$, on a :

$$P(J) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

de sorte que $P(J) = 0$ si, et seulement si, $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$. Ainsi, la famille $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est libre, de sorte que $\deg(\pi_J) \geq n$. Puisque π_J divise $X^n - 1$, on a $\pi_J = X^n - 1$. Alors χ_J est un diviseur unitaire de degré n de π_J , donc :

$$\chi_J = X^n - 1.$$

Q7. Comme observé à la question précédente, on a :

$$P(J) = A.$$

Q8. Puisque $\pi_J = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$Q^{-1}JQ = \text{diag}(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}) = \Delta.$$

Alors, on a

$$P(J) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (Q\Delta Q^{-1})^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k Q\Delta^k Q^{-1} = Q \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta^k \right) Q^{-1} = QP(\Delta)Q^{-1}$$

donc

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}P(J)Q = \text{diag}(P(\omega_0), P(\omega_1), P(\omega_2), \dots, P(\omega_{n-1})).$$

Q9. Avec les notations précédentes, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k) = \det(Q^{-1}AQ) = \det(A)$$

mais $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\det(A) \in \mathbb{R}$ et donc :

$$\prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k) \in \mathbb{R}.$$

Remarque



L'énoncé demandait de montrer que $\prod_{k=1}^n P(\omega_k)$, ce que l'on ne peut pas obtenir à partir du raisonnement proposé si $P(\omega_0) = P(1) = 0$. Il semble donc y avoir une imprécision dans l'énoncé, qui aurait dû rajouter $P(\omega_0)$ dans la relation (*).

Pour autant, il est possible de démontrer (*) directement, sans recourir à la stratégie proposée par l'énoncé. En effet, puisque P est à coefficients réels, on a :

$$\overline{\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k)} = \prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{\omega_k}) = \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_{n-k}) = \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k)$$

et la relation (*) est établie.

Problème

Q10. a) D'une part $\sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle e_i \in \text{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_n) = F$. D'autre part, pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a :

$$\left\langle x - \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle = \langle x, e_j \rangle - \left\langle \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0$$

donc $x - \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle e_i \in \text{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_n)^\perp = F^\perp$.

Il s'ensuit que :

$$p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

b) D'après le **théorème de Pythagore**, puisque $p_F(x)$ et $x - p_F(x)$ sont orthogonaux, on a :

$$\|x\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2$$

mais, puisque (e_0, e_1, \dots, e_n) est orthonormée, on a :

$$\|p_F(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle^2$$

donc

$$\sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Q11. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (a+b)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ a^2 + b^2 \geq -2ab \end{cases}$$

donc

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Soit $(f, g) \in E^2$. La fonction fg est continue par produit et, pour tout $t \in I$, on a :

$$|f(t)g(t)|e^{-t} \leq \frac{f^2(t) + g^2(t)}{2}e^{-t} = \frac{1}{2}f^2(t)e^{-t} + \frac{1}{2}g^2(t)e^{-t}$$

mais $t \mapsto f^2(t)e^{-t} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ et $t \mapsto g^2(t)e^{-t} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ car f et g appartiennent à E donc, puisque $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel, $t \mapsto \frac{1}{2}f^2(t)e^{-t} + \frac{1}{2}g^2(t)e^{-t} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$. Par **domination** :

$$t \mapsto f(t)g(t)e^{-t} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}).$$

Q12. ▶ $\langle -, - \rangle$ est bien défini d'après la question précédente.
 ▶ $\langle -, - \rangle$ est symétrique par commutativité du produit de fonctions numériques,

- ▶ $\langle -, - \rangle$ est bilinéaire par bilinéarité de la multiplication dans \mathbb{R} , et par linéarité de l'intégrale, les fonction $t \mapsto f(t)e^{-t}$ et $t \mapsto g(t)e^{-t}$ étant intégrables pour tout $(f, g) \in E^2$.
- ▶ Pour tout $f \in E$, on a :

$$\langle f, f \rangle = \int_0^{+\infty} \underbrace{f^2(t)e^{-t}}_{\geq 0} dt \geq 0,$$

et, puisque $t \mapsto f^2(t)e^{-t}$ est continue de signe constant, on a égalité si, et seulement si, $f^2(t)e^{-t} = 0$ pour tout $t \in I$, c'est-à-dire $f = 0$.

En conclusion :

$\langle -, - \rangle$ est un produit scalaire.

- Q13.** On sait déjà que $F = \mathbb{R}_n[X]$ est non vide stable par combinaison linéaire, il s'agit donc de montrer que $F \subset E$. La fonction nulle appartient à E . Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul, on note d son degré et a_d son coefficient dominant. Alors $t \mapsto P(t)e^{-t} \in C^0(I, \mathbb{R})$ et

$$P(t)^2 e^{-t} \underset{f \rightarrow +\infty}{\sim} a_d^2 t^{2d} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-t/2}).$$

Or $t \mapsto e^{-t/2} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ donc, par comparaison, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt$ converge absolument de sorte que $P \in E$.

On a donc bien $F \subset E$ et donc :

F est un sous-espace vectoriel de E .

- Q14.** a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. D'après la **formule de Leibniz**, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} h_n^{(p)}(x) &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{d^k}{dx^k}(x^n) \frac{d^{p-k}}{dx^{p-k}}(e^{-x}) \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{p-k} e^{-x} \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{p-k} x^{n-k} e^{-x}. \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, \quad h_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{p-k} x^{n-k} e^{-x}.$$

Si $p < n$, pour tout $k \in \llbracket 0; p \rrbracket$, on a $n-k \neq n-p \geq 1$ donc :

$$p < n \Rightarrow h_n^{(p)}(0) = 0.$$

- b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-x)^{n-k} e^{-x} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \binom{n}{k} (-x)^{n-k}$$

de sorte que :

$$L_n \in \mathbb{R}[X].$$

En outre, en considérant le terme correspondant à $k = 0$, on a :

$$\deg(L_n) = n \quad \text{et} \quad \text{cd}(L_n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Q15.

Remarque



Il semble ici y avoir une erreur d'énoncé car l'expression de $\langle g, h_n^{(n)} \rangle$ en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)h_n(t) dt$ n'est ni aisée, ni utile pour la suite. Il nous semble que l'énoncé souhaitait vraisemblablement demander l'expressions de $\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t) dt$ en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)h_n(t) dt$, ce que nous allons faire.

Par intégration par parties, sous réserve de convergence, on a :

$$\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t) dt = [g(t)h_n^{(n-1)}(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} g'(t)h_n^{(n-1)}(t) dt$$

mais

$$g(t)h_n^{(n-1)}(0) = 0$$

d'après la question précédente puisque $n - 1 < n$ et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)h_n^{(n-1)}(t) = 0,$$

par croissances comparées puisque g est polynomiale ; l'intégration par parties est donc licite et le crochet nul, de sorte que :

$$\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t) dt = - \int_0^{+\infty} g'(t)h_n^{(n-1)}(t) dt.$$

En effectuant n IPP successives, toutes licites pour les mêmes raisons, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)h_n(t) dt.$$

Alors

$$\langle g, L_n \rangle = \int_0^{+\infty} g(t) \frac{e^t}{n!} h_n^{(n)}(t) e^{-t} dt = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t) dt = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)h_n(t) dt$$

et donc :

$$\langle g, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)t^n e^{-t} dt.$$

Q16. Soit $(i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket$ avec $i < j$. D'après la question précédente, on a :

$$\langle L_i, L_j \rangle = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^{+\infty} L_i^{(j)}(t)t^j e^{-t} dt$$

mais $\deg(L_i) = i < j$ donc $L_i^{(j)} = 0$ et donc :

$$i < j \Rightarrow \langle L_i, L_j \rangle = 0.$$

Q17. L'énoncé demande de faire des intégrations par parties mais, la fonction Γ étant bien connue des candidats en MP, nous nous permettons un raccourci :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \Gamma(n+1) = n!.$$

Alors

$$\langle L_n, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt$$

mais $\deg(L_n) = n$ et $\text{cd}(L_n) = \frac{(-1)^n}{n!}$ donc

$$L_n^{(n)} = n! \text{cd}(L_n) = (-1)^n$$

de sorte que

$$\langle L_n, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n e^{-t} dt = \frac{(-1)^n}{n!} (-1)^n n! = 1.$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \langle L_n, L_n \rangle = 1.$$

Q18. Il suit des question **Q16** et **Q17** que (L_0, L_1, \dots, L_n) est une base orthonormée de F donc, d'après la formule de projection rappelée en **Q10**, on a :

$$\forall g \in E, p_F(g) = \sum_{k=0}^n \langle g, L_k \rangle L_k.$$

Q19. On note $\|-\|$ la norme associée au produit scalaire sur E . Soit $g \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suit de **Q10** que :

$$\sum_{i=0}^n \langle g, L_i \rangle^2 \leq \|g\|^2$$

donc la suite $\left(\sum_{i=0}^n \langle g, L_i \rangle^2 \right)_{n \in \mathbb{N}}$ des **sommes partielles** de la série $\sum_{n \geq 0} \langle g, L_n \rangle^2$ est majorée par $\|g\|^2$. Cette série étant à **termes positifs**, on a :

$$\sum_{n \geq 0} \langle g, L_n \rangle^2 \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, L_n \rangle^2 \leq \|g\|^2.$$

Q20.

Remarque



Il y a ici une incohérence dans le sujet puisque α est d'abord supposé strictement supérieur à $-\frac{1}{2}$, puis quelconque. Nous travaillerons avec la première condition.

Soit $\alpha > -\frac{1}{2}$ et $g_\alpha : x \mapsto e^{-\alpha x} \in C^0(I, \mathbb{R})$. Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$g_\alpha^2(x) e^{-x} = e^{-(1+2\alpha)x}$$

et $\alpha > -\frac{1}{2}$ donc $-(1+2\alpha) < 0$ de sorte que

$$x \mapsto g_\alpha^2(x) e^{-x} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}).$$

Il s'ensuit que

$$g_\alpha \in E.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\langle g_\alpha, L_n \rangle &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g_\alpha^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} (-1)^n \alpha^n e^{-\alpha t} t^n e^{-t} dt \\ &= \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-(1+\alpha)t} t^n dt.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable généralisé $u = (1 + \alpha)t$ qui est licite car C^1 et bijectif de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R}_+ , on a :

$$\langle g_\alpha, L_n \rangle = \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^n \frac{1}{(1+\alpha)^{n+1}} du = \frac{\alpha^n}{n!(1+\alpha)^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^n du = \frac{\alpha^n}{(1+\alpha)^{n+1}}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha, L_n \rangle^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(1+\alpha)^{2(n+1)}} \\ &= \frac{1}{(1+\alpha)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^2 \right)^n \\ &= \frac{1}{(1+\alpha)^2} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^2} \\ &= \frac{1}{(1+\alpha)^2 - \alpha^2} \\ &= \frac{1}{1+2\alpha}.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\|g_\alpha\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(1+2\alpha)t} dt = \left[-\frac{e^{-(1+2\alpha)t}}{1+2\alpha} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+2\alpha}.$$

En conclusion, on a bien :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha, L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2.$$

*** Fin du sujet ***